# *KIT DE SURVIE EN RECHERCHE D'EXTREMA LIÉS*

*<u>Remarques préliminaires</u> : Ce court document n'a nullement la prétention de présenter la question de la recherche d'extrema liés avec toute la rigueur qui lui serait due ni avec exhaustivité (loin s'en faut !). Le but de ce document est simplement d'essayer de synthétiser les méthodes d'optimisation sous contraintes avec lesquelles vous devez être un minimum familiers pour vous sentir à l'aise avec les calculs réalisés au cours de ce $TD$ de Miroéconomie en $L2$. Je m'excuse auprès des étudiants passionnés par les mathématiques pour les imprécisions qui parsèment ce document et auprès des étudiants à la curiosité insatiable qui auraient aimé en apprendre plus à ce sujet. À ceux-ci, je rappelle qu'il existe en $L3$ un cours optionnel d'optimisation que je vous incite vivement à suivre. J'en profite pour remercier mon frère (professeur agrégé de mathématiques) qui a bien voulu relire et corriger certains points de ce document.*

## *1) Pour bien commencer*

### *a) Un peu de vocabulaire*

**<u>Optimiser</u>** signifie **<u>maximiser</u>** ou **<u>minimiser</u>** une fonction.

La fonction que l'on cherche à optimiser s'appelle la **<u>fonction objectif.</u>**

*<u>Exemple :</u> $u$ est la fonction objectif*

La fonction objectif dépend d'une ou de plusieurs variables que l'on appelle **<u>arguments</u>**.

*<u>Exemple :</u> La fonction $u$ dépend de $x_1$ et de $x_2$. Ainsi, on peut l'écrire $u(x_1, x_2)$, $x_1$ et $x_2$ sont les arguments de cette fonction.*

Les **<u>arguments maximaux</u>** (resp. **<u>arguments minimaux</u>**) d'une fonction correspondent aux valeurs des arguments qui maximisent (resp. minimisent) cette fonction.

La **<u>valeur optimale</u>** (maximale ou minimale) d'une fonction est égale à l'image de ses arguments optimaux (maximaux ou minimaux).

*<u>Exemple :</u> On va chercher à déterminer les arguments maximaux $(x_1^*, x_2^*)$ de manière à ce que la fonction $u$ soit maximale et ainsi calculer cette valeur maximale : $u(x_1^*, x_2^*)$*

On parle d'**<u>optimisation libre</u>** lorsqu'on optimise la fonction objectif sans introduire quelque contrainte que ce soit. On parle d'**<u>optimisation sous contrainte</u>** ou encore d'**<u>optimisation liée</u>** si l'on introduit une ou plusieurs contraintes sur les arguments.

Une contrainte peut être écrite sous forme d'**<u>équation</u>** $(g(x_1, x_2) = 0)$ ou d'**<u>inéquation</u>** $(g(x_1, x_2) \geq 0)$ (ou bien $g(x_1, x_2) \leq 0$ peu importe).

On parlera de **<u>solution</u>** pour désigner les arguments optimaux du problème d'optimisation.

*<u>Exemple :</u> $(x_1^*, x_2^*)$ est la solution du problème d'optimisation.*

Dans le cas d'une contrainte écrite sous forme d'inéquation du type $g(x_1, x_2) \geq 0$, on dit que la contrainte est **saturée** (ou encore **active**) si à la solution du problème, $g(x_1^*, x_2^*) = 0$. On dit que la contrainte est **libre** (ou encore **passive**), si à la solution du problème, $g(x_1^*, x_2^*) > 0$.

*Exemple : Si on vous demande de grimper le plus haut possible sur une montagne et qu'on vous donne* $4h$*. Si vous parvenez au sommet de la montagne (vous ne pouvez pas aller plus haut) en* $3h$*, alors c'est que la contrainte (temporelle) est libre. Si vous grimpez jusqu'à la dernière seconde, alors la contrainte est saturée.*

**Dans le cadre de ce TD de microéconomie,** une solution est dite **intérieure** si celle-ci est telle que tous les arguments optimaux de la fonction objectif sont strictement positifs ($\boldsymbol{x}^* \gg \mathbf{0}$) (tous les éléments du vecteur $x^*$ sont strictement positifs).

Un **programme d'optimisation** (ou **problème d'optimisation**) indique :

- Le type d'optimisation à réaliser : maximisation ou minimisation
- La fonction objectif à optimiser
- L'ensemble des arguments dont on doit déterminer la valeur optimale
- L'ensemble des contraintes

*Exemple :*

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, g(x_1, x_2) \geq 0 \\ t.q.\, h(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

## b) Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier les explications qui vont suivre, je pose les hypothèses suivantes (souvent vérifiées en microéconomie) :

- Il existe qu'une seule solution au problème d'optimisation. Elle est intérieure et unique.

*Remarque : Faire l'hypothèse d'une solution intérieure nous simplifie grandement la vie ! En effet, sans cette hypothèse, il faudrait rajouter autant de contraintes écrites sous la forme d'inégalités de non-négativité que d'arguments de la fonction objectif* ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$)*.*

- Les conditions de second ordre sont vérifiées.

*Remarque : Gardez bien à l'esprit que les méthodes qui vont être développées dans ce document permettent seulement d'identifier les points critiques, candidats à être solution du problème d'optimisation. Autrement dit, nous ne vérifions ici que les conditions nécessaires d'optimalité. Dans certains cas, celles-ci sont également suffisantes, mais la plupart du temps il faut s'intéresser aux conditions de second ordre de manière s'assurer que la courbure de la fonction objectif au voisinage du point critique est compatible avec le problème d'optimisation. Il serait en effet plutôt stupide d'identifier les arguments minimaux d'une fonction alors qu'on vous demande de la maximiser !*

*Remarque : Tout au long de cette fiche, je prendrai l'exemple de fonctions objectifs n'ayant que deux variables et de programmes d'optimisation ne comportant qu'une seule contrainte. Les explications que je propose peuvent naturellement s'appliquer dans les cas où le nombre de variables et/ou de contraintes est plus élevé.*

## c) Une astuce qui peut servir !

En économie, on a l'habitude de maximiser plutôt que de minimiser. Du coup, certains étudiants peuvent être mis en difficulté lorsqu'ils sont confrontés à un problème de minimisation. Pourtant, il existe une technique très simple qui vous permet de retomber sur vos pattes. En effet, les arguments minimaux de la fonction $f$ et les arguments maximaux de la fonction $-f$ sont identiques. Ainsi, une fois que vous avez calculé les arguments maximaux de la fonction $-f$, il vous suffit de les substituer dans la fonction $f$ pour obtenir sa valeur minimale.

## 2) Optimisation avec contraintes écrites sous forme d'égalités et fonctions implicites

Soit le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1,x_2\}} u(x_1,x_2) \\ t.q.\, h(x_1,x_2) = 0 \end{cases}$$

Il existe deux méthodes de résolution.

La première consiste simplement à utiliser les fonctions implicites. La seconde s'appelle la méthode de Lagrange, elle fait appel aux conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker.

Les économistes semblent adorer utiliser un marteau pour assommer une mouche (« Pourquoi peut-on faire simple quand on peut faire compliqué ?! ») et ont tendance à utiliser la méthode de Lagrange pour résoudre ce problème d'optimisation que l'on pourrait pourtant traiter de manière triviale en faisant appel aux fonctions implicites. En effet, la méthode de Lagrange est un outil puissant qui permet de traiter les problèmes d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'inéquations. Il peut bien entendu être appliqué à la programme d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'égalités mais sa plus grande complexité le rend peu attractif. Malheureusement pour vous, on peut explicitement vous demander d'utiliser la méthode de Lagrange.

Dans cette première partie, je ne présenterai que la méthode dite des fonctions implicites. Je reviendrai dans la quatrième partie sur l'application de la méthode de Lagrange aux programmes d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'égalités.

### a) Méthode

La contrainte écrite sous forme d'égalité $h(x_1,x_2) = 0$ permet de déterminer deux fonctions implicites : $x_2 = \varphi(x_1)$ et $x_1 = \psi(x_2)$. En substituant l'une ou l'autre de ces fonctions implicites dans la fonction objectif, nous allons non seulement « intégrer » la contrainte à la fonction objectif mais également transformer cette fonction initialement à deux variables à une fonction à une seule variable. Ainsi, en supposant que l'on ait utilisé la fonction $x_1 = \psi(x_2)$ le programme d'optimisation devient

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_2\}} u(\psi(x_2),x_2) \\ t.q.\, x_1 = \psi(x_2) \end{cases}$$

Notez bien que l'équation $x_1 = \psi(x_2)$ n'est pas vraiment une contrainte. Il s'agit plutôt d'une relation qui nous permettra *ex post* de déterminer $x_1^*$ une fois que l'on aura calculé $x_2^*$. Le problème s'apparente ainsi à un programme d'optimisation libre d'une fonction objectif n'ayant qu'un seul argument. Afin de le résoudre, il suffit de déterminer la valeur optimale $x_2^*$ qui annule la dérivée première de la fonction objectif.

$$\frac{\partial u(\psi(x_2), x_2)}{\partial x_2} = 0$$

Une fois que l'on a calculé $x_2^*$, il suffit de déduire la valeur optimale $x_1^*$ via la fonction implicite $\psi$.

$$x_1^* = \psi(x_2^*)$$

Enfin, on peut déterminer la valeur optimale de la fonction objectif en y substituant les arguments maximaux.

$$u(x_1^*, x_2^*)$$

## b) Exemple

Soit $(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ , $h(x_1, x_2) = R - x_1p_1 - x_2p_2$

Nous cherchons à déterminer le couple $(x_1^*, x_2^*)$ qui maximise la fonction $u(x_1, x_2)$ sous la contrainte écrite sous forme d'égalité que $h(x_1, x_2) = 0$

Le programme s'écrit donc

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1,x_2\}} 2x_1x_2 \\ t.q. R - x_1p_1 - x_2p_2 = 0 \end{cases}$$

On peut déterminer les deux fonctions implicites à la contrainte (la détermination d'une seule d'entre elles suffirait) :

$$x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 = \varphi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{R}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}x_2 = \psi(x_2)$$

En substituant l'une ou l'autre de ces fonctions implicites dans la fonction objectif, on peut alors réécrire le problème de maximisation de la sorte :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1\}} \left(x_1, \varphi(x_1)\right) \\ t.q. x_2 = \varphi(x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\limits_{\{x_1\}} 2x_1(\frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1) \\ t.q. x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \end{cases}$$

Nous faisons désormais face à un problème de maximisation s'apparentant à de l'optimisation libre pour lequel la fonction objectif n'a qu'un seul argument $(x_1)$. Pour résoudre ce problème, il suffit de déterminer la valeur optimale $x_1^*$ pour laquelle la dérivée première de la fonction objectif s'annule :

$$\frac{\partial u\left(x_1, \varphi(x_1)\right)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1^* = \frac{R}{2p_1}}$$

D'après la fonction implicite $\varphi$, on déduit immédiatement la valeur optimale $x_2^*$ :

$$x_2^* = \varphi(x_1^*) \Leftrightarrow x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1^* \Leftrightarrow x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{R}{2p_1}\right) \Leftrightarrow \boxed{x_2^* = \frac{R}{2p_2}}$$

On peut enfin déterminer la valeur optimale prise par la fonction objectif :

$$u(x_1^*, x_2^*) = 2x_1^*x_2^* \Leftrightarrow u(x_1^*, x_2^*) = 2\left(\frac{R}{2p_1}\right)\left(\frac{R}{2p_2}\right) \Leftrightarrow \boxed{u(x_1^*, x_2^*) = \frac{R^2}{2p_1p_2}}$$

## ***3) Optimisation sous contraintes écrites sous forme d'inégalités et méthode de Lagrange***

Lorsque l'on a affaire à un problème d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'inégalités, la méthode précédemment présentée ne peut plus s'appliquer. On utilise alors la méthode de Lagrange et les conditions d'optimalité de Kuhn & Tucker.

### ***a) Méthode***

Supposons que nous devions résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, h(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

La première étape consiste à définir la fonction de Lagrange $L$ associée à ce problème :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)\,;\lambda \geq 0$$

Notez que par convention, on écrit toujours les contraintes écrites sous forme d'inégalités sous la forme $h(x_1, x_2) \geq 0$. Ainsi, si vous avez une contrainte du type $R \geq x_1p_1 + x_2p_2$, alors $h(x_1, x_2) = R - p_1x_1 - p_2x_2$. Si vous avez une contrainte du type $y_1 \leq 2\sqrt{y_2}$, alors $h(x_1, x_2) = 2\sqrt{y_2} - y_1$

La fonction de Lagrange associée à un problème d'optimisation se définit simplement comme la somme de la fonction objectif et des contraintes, celles-ci étant pondérées par les multiplicateurs de Lagrange leur étant associés (un multiplicateur par contrainte).

La variable $\lambda$ est appelée multiplicateur de Lagrange. Sa valeur dépend des arguments de la fonction objectif. Un multiplicateur de Lagrange (lorsqu'il est évalué à la solution du problème), indique la variation de la fonction objectif à laquelle conduirait un relâchement marginal de la contrainte lui étant associée.

*<u>Exemple :</u> Dans le cadre de l'équilibre du consommateur, cela revient à se poser la question suivante : si je donne un euro de plus au consommateur, de combien va-t-il pouvoir faire progresser son utilité totale ? C'est précisément ce que mesure la valeur prise à la solution du problème par le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire. Il correspond ici à l'utilité marginale du revenu.*

Ainsi, lorsqu'à la solution du problème la contrainte est libre, on comprend que le multiplicateur y étant associé sera nul.

*<u>Exemple :</u> Dans le cadre de l'équilibre du consommateur, si à la solution du problème ma contrainte budgétaire est libre, c'est que je ne dépense déjà pas tout mon revenu. Ainsi, si on me donne un euro de plus, cela ne va pas me permettre de faire progresser mon utilité. L'utilité marginale du revenu est nulle.*

En revanche, lorsqu'à la solution du problème la contrainte est active, alors le multiplicateur y étant associé sera positif.

*<u>Exemple :</u> Dans le cadre de l'équilibre du consommateur, lorsqu'à la solution du problème je dépense l'ensemble de mon revenu, alors si on me donne un euro supplémentaire, cela va me permettre d'augmenter mon utilité via un panier de consommation mieux fourni. L'utilité marginale du revenu est positive.*

*<u>Remarque :</u> Supposons que nous fassions face au problème de minimisation suivant :*

$$\begin{cases} \min\limits_{\{x_1,x_2\}} u(x_1,x_2) \\ t.q.\, h(x_1,x_2) \geq 0 \end{cases}$$

*On pourrait bien sûr le transformer en un problème de maximisation conformément à ce qui a été expliqué précédemment. Si l'on ne souhaite pas utiliser cette astuce, alors la fonction de Lagrange $L$ étant associée à ce programme de minimisation s'écrit ainsi :*

$$L(x_1,x_2,\lambda) = u(x_1,x_2) - \lambda h(x_1,x_2)\ ;\ \lambda \geq 0$$

*Désormais, la fonction de Lagrange se définit comme la différence entre la fonction objectif et la contrainte, celle-ci étant pondérée par le multiplicateur qui se doit d'être positif.*

Revenons-en à notre problème de maximisation : un théorème nous dit que le système des conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker est le suivant (les dérivées partielles étant évaluées à la solution du problème) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = 0\ (1) \\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = 0\ (2) \\ \lambda^* \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = 0\ (3) \\ \lambda^* \geq 0\ (4) \end{cases}$$

Dans le cas présent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} - \lambda^* \dfrac{\partial h(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \lambda^* \dfrac{\partial h(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ \lambda^* h(x_1^*,x_2^*) = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

Il est possible de décomposer ces conditions en trois catégories :

- **<u>Les équations marginales $(1)+(2)$ :</u>** elles s'apparentent aux conditions de premier ordre que l'on retrouve dans le contexte d'un programme d'optimisation libre. Elles indiquent simplement qu'à la solution du problème les dérivées premières de la fonction objectif (qui est désormais la fonction de Lagrange) doivent être nulles.

- **Les relations d'exclusion $(3)$ :** À la solution du problème, chaque contrainte peut être soit libre, soit saturée. Si elle est saturée, alors $h(x_1^*, x_2^*) = 0$ et le multiplicateur y étant associé est positif ($\lambda^* \geq 0$). Si elle est libre, alors $h(x_1^*, x_2^*) > 0$ et le multiplicateur y étant associé est nul ($\lambda^* = 0$). Ainsi, le produit $\lambda^* h(x_1^*, x_2^*)$ est toujours nul, c'est précisément ce qu'indiquent les relations d'exclusion.

- **Les contraintes de non-négativité des multiplicateurs $(4)$ :** Ces inéquations rappellent simplement que les multiplicateurs de Lagrange doivent être positifs.

La résolution de ce système permet de déterminer la solution du problème. On peut ensuite vérifier *ex post* que les contraintes sur les arguments sont bien respectées et enfin déterminer la valeur optimale prise par la fonction objectif.

*Remarque : Dans le cas de contraintes multiples, le système des conditions premières peut devenir assez compliqué à résoudre. La technique de résolution que l'on peut employer consiste à envisager et tester la validité de chacune des configurations de la solution du problème admissible. Si par exemple on a deux contraintes, alors quatre cas seront à traiter : les deux contraintes sont libres, la première est libre et la seconde est saturée, la première est saturée et la seconde est libre et enfin les deux contraintes sont saturées. Dans chaque cas, ces hypothèses permettent de reformuler les relations d'exclusion et permettent alors de tester la validité des équations marginales.*

### a) Exemple

Supposons que nous ayons à résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \max_{\{y_1 y_2\}} \pi(y_1, y_2) = p_1 y_1 - p_2 y_2 \\ t.q. y_1 \leq 2\sqrt{y_2} \end{cases}$$

Avec $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$

La fonction de Lagrange $L$ y étant associée est la suivante :

$$L(y_1, y_2, \lambda) = p_1 y_1 - p_2 y_2 + \lambda(2\sqrt{y_2} - y_1)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \lambda^* \dfrac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 - \lambda^* = 0 \\ -p_2 + \dfrac{\lambda^*}{\sqrt{y_2^*}} = 0 \\ \lambda^*(2\sqrt{y_2^*} - y_1^*) = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

Puisque $p_1 > 0$, alors $\lambda^* > 0$. Ainsi, la contrainte va être saturée : $y_1^* = 2\sqrt{y_2^*}$. Ainsi, on peut réécrire les conditions d'optimalité de la sorte :

$$\begin{cases} p_1 = \lambda^* > 0 \\ -p_2 + \dfrac{p_1}{\sqrt{y_2^*}} = 0 \\ 2\sqrt{y_2^*} - y_1^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \lambda^* > 0 \\ y_2^* = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^2 \\ 2\sqrt{y_2^*} - y_1^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \lambda^* > 0 \\ y_2^* = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^2 \\ 2\sqrt{\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^2} - y_1^* = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda^* = p_1 > 0 \\ y_2^* = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \\ y_1^* = \frac{2p_1}{p_2} \end{cases}}$$

On peut désormais calculer la valeur optimale prise par la fonction objectif :

$$\pi(y_1^*, y_2^*) = p_1\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) - p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{\pi(y_1^*, y_2^*) = \frac{p_1^2}{p_2}}$$

## 4) Optimisation sous contraintes écrites sous forme d'égalités et méthode de Lagrange

Lorsque les contraintes sont écrites sous forme d'égalités, nous avons vu qu'il est possible de résoudre le problème d'optimisation très simplement en utilisant les fonctions implicites. Pourtant, certains professeurs peuvent vous demander explicitement d'utiliser la méthode de Lagrange.

### a) Méthode

Supposons que l'on vous demande de résoudre le programme suivant en utilisant la méthode de Lagrange :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, h(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

La contrainte $h(x_1, x_2) = 0$ peut-être appréhendée comme le cas limite d'une contrainte écrite sous forme d'inégalité du type $h(x_1, x_2) \geq 0$ qui serait saturée à la solution du problème. C'est comme cela qu'il faut aborder le problème : faire « comme si » on avait affaire à une contrainte écrite sous forme d'inégalité et anticiper qu'elle sera saturée à la solution du problème.

Ainsi, la fonction de Lagrange associée à ce programme est la même que celle que nous aurions associé au problème suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, h(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

En l'occurrence :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)$$

Ce qui va différer, c'est bien entendu la forme prise par les conditions d'optimalité de Kuhn & Tucker. En effet, dans le cas présent, la relation d'exclusion traduit simplement le fait que la contrainte va être saturée à la solution du problème ($h(x_1^*, x_2^*) = 0$ et $\lambda^* \geq 0$). Ainsi, le système des conditions nécessaires d'optimalité s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \dfrac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \dfrac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ h(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

On observe donc que rien ne change par rapport à de la programmation sous contraintes écrites sous forme d'inégalités si ce n'est le fait que l'on connait déjà la configuration de la solution finale : la contrainte sera saturée.

### *b) Exemple*

Reprenons le même exemple que celui que nous avions traité dans la première partie de cette fiche. Nous avions alors utilisé la méthode des fonctions implicites, montrons que l'on peut parvenir au même résultat avec la méthode de Lagrange (bien que cela soit nettement moins trivial)

Soit $(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ , $h(x_1, x_2) = R - x_1p_1 - x_2p_2$

Nous cherchons à déterminer le couple $(x_1^*, x_2^*)$ qui maximise l'expression $u(x_1, x_2)$ sous la contrainte écrite sous forme d'égalité $h(x_1, x_2) = 0$

Le programme s'écrit donc

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} 2x_1x_2 \\ t.q. R - x_1p_1 - x_2p_2 = 0 \end{cases}$$

La fonction de Lagrange $L$ associée à ce problème prend la firme suivante :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1x_2 + \lambda(R - x_1p_1 - x_2p_2)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

*Détail de la résolution :*

$$\begin{cases} 2x_2^* - \lambda^* p_1 = 0 \\ 2x_1^* - \lambda^* p_2 \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \lambda^* \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{p_1}{p_2} x_1^* = x_2^* \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{p_1}{p_2} x_1^* = x_2^* \\ R - x_1^* p_1 - \left(\dfrac{p_1}{p_2} x_1^*\right) p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\left(\dfrac{R}{2p_1}\right)}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \geq 0 \\ \dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{R}{2p_1}\right) = x_2^* \\ x_1^* = \dfrac{R}{2p_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{R}{p_1 p_2} = \lambda^* \geq 0 \\ \dfrac{R}{2p_2} = x_2^* \\ \dfrac{R}{2p_1} = x_1^* \end{cases}}$$

On peut enfin déterminer la valeur optimale prise par la fonction objectif :

$$u(x_1^*, x_2^*) = 2x_1^* x_2^* \Leftrightarrow u(x_1^*, x_2^*) = 2\left(\frac{R}{2p_1}\right)\left(\frac{R}{2p_2}\right) \Leftrightarrow \boxed{u(x_1^*, x_2^*) = \frac{R^2}{2p_1 p_2}}$$

On retrouve bel et bien les résultats auxquels nous étions parvenus dans la seconde partie.

On peut vérifier que la valeur prise à la solution du programme par le multiplicateur de Lagrange correspond à l'utilité marginale du revenu :

$$\boxed{\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial R} = \frac{R}{p_1 p_2} = \lambda^*}$$