2011
2012

LICENCE 3 – SCIENCES ECONOMIQUES

COURS DE M. CHRISTIAN LAGARDE

# Macroéconomie dynamique

H34VEN
Cours pour Licence 3, Semestre 5 Année 2011-2012

LICENCE 3 – SCIENCES ECONOMIQUES

COURS DE M CHRISTIAN LAGARDE

# Cours magistral de Macroéconomie Dynamique

*Ecrit pour les étudiants de troisième année de licence en sciences économiques*

**Pour toutes incompréhensions, imperfections ou erreurs éventuelles,**

**Merci de les signaler sur le forum de la faculté de sciences économiques de l'UM1, à cette adresse :**

**http://www.forum-sceco.fr (Connexion à partir de http://gide-éco.fr/forum ), à défaut de ne pouvoir me contacter directement...**

PRISE DE NOTE PAR : PLASMAN SYLVAIN

ANNEE 2011 – 2012

# Introduction

A.

On étudie les causes et les modalités de la croissance économique. Une approche dynamique qui vise à rendre compte des modifications de l'économie, ainsi le temps devient une variable essentielle de l'analyse économique.

Dans le cas de la dynamique, on peut analyser une économie en évolution sur une longue période et généralement, dans ce cas, on substituera au niveau des variables les taux de croissance.

D'un autre côté, on peut étudier les adaptations d'une économie au divers déséquilibres, ce sont donc des modèles avec délais et décalages, et il n'y a pas nécessaire l'idée d'une évolution à long terme.

C'est une analyse macroéconomique, c'est-à-dire que l'on va s'intéresser aux mouvements des variables globales, ou bien d'un agent représentatif. On ne cherche pas à fonder le comportement des variables sur la rationalité des agents, contrairement à la microéconomie.

« ***Le développement*** *va de pair avec la transformation des structures démographiques, économiques et institutionnelles, donc incluant le changement de mentalité. C'est donc la combinaison des changements mentaux et sociaux d'une population qui la rendent apte à faire croitre régulièrement et durablement son produit réel globale* »

*François PERROUX*

**La croissance** est simplement un accroissement durable et irréversible des quantités économiques sur une longue période.

**L'expansion** est un accroissement temporaire et réversible de quantités économiques liées aux mouvements courts de la conjoncture.

La croissance, on la mesure encore à l'aide du *Produit Intérieur Brut* avec toutes les limites de ce genre de mesure. Jusqu'en 1500, il y a stagnation de la population et du PIB. Entre 1500 et 1700, il y a eu une croissance de la population d'environ 0,2% par an et une croissance du PIB de 0,2% par an. Ce qui compte, c'est la croissance du PIB par tête, qui est de 0,3%, déterminant la richesse et le confort de la population. Entre 1700 et 1820, on a un taux de croissance du PIB de 0,6% par an et de la population 0,9%. Entre 1820 et 1980, taux de croissance de la population 0,9% par an, et PIB 2,5% par an

- De -8.000 à 1500 : PIB : +0,2%, Population : +0,2%
- De 1700 à 1820 : PIB : +0,6%, Population : +0,9%
- De 1820 à 1980 : PIB : +0,9%, Population : +2,5%

Si on a un taux de croissance du PIB de 3,5%, le produit double en 21 ans, multiplié par 31 en 1 siècle et multiplié par 961 en 2 siècles. A 5%, doublement du produit tous les 15 ans, multiplié par 131 en 1 siècle et multiplié par 17.292 en 2 siècles.

Les crises, elles existent depuis les temps bibliques. Elles sont principalement liées aux aléas climatiques et à leurs répercussions sur les récoltes. Avec l'industrie et le capitalisme apparait un nouveau type de crise, les crises de surproduction, n'étant pas, elles, liées au climat.

**La crise** s'exprime souvent par une contraction brutale de la production, une baisse générale des prix, une multiplication des faillites, une baisse généralisée des salaires et une montée des tensions sociales.

B. La fonction d'investissement

Ce que l'on appelle l'investissement productif, c'est une demande de facteurs de production par les entreprises.

a. Rappel sur la fonction de production

L'investissement peut être analysé à partir de la demande de facteurs par le producteur dans la théorie économique.

- Fonction de production : un facteur substituable

$$Q = F(K, L)$$

Si, et seulement si, on a des rendements d'échelle constante, alors, on peut l'écrire sous sa forme réduite :

$\rightarrow \frac{Q}{L} = F\left(\frac{K}{L}; 1\right)$

$q = f(k)$, où $q$ étant le capital par tête

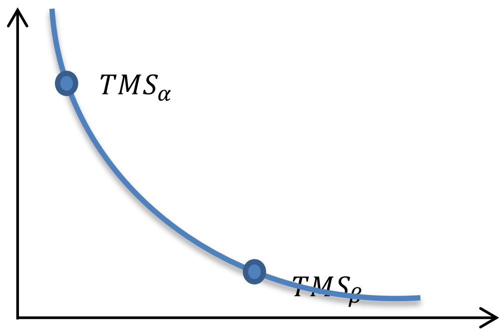
$Q = Lf(k)$

$F'_K = L\frac{\partial f(k)}{\partial k} * \frac{\partial k}{\partial K} = Lf'(k) * \frac{1}{L} = f'(k)$, où $F'_k$ étant la productivité marginale du capital

$F'_L = f(k) + Lf'(k)\left(-\frac{K}{L^2}\right) = f(k) - k\big(f'(k)\big)$

$TMS = -\frac{dK}{dL} = \frac{F'_L}{F'_K}$

$\sigma = \frac{dk}{k} / \frac{dTMS}{TMS} = \frac{dlogk}{dlogTMS}$ où $\sigma$ étant l'élasticité de substitution




L'élasticité de substitution explique la sensibilité de la structure technique à la modification des coûts relatifs du travail et du capital. A l'optimum, le TMS est égale au rapport des prix :

$$TMS = \frac{w}{\rho}, \text{où } w \text{ étant le prix du travail et où } \rho \text{ étant le prix du capital}$$

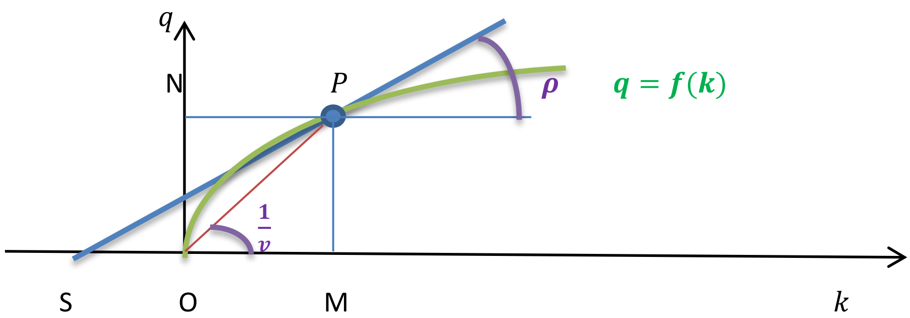
Les rendements d'échelle peuvent être constants, croissant ou décroissant.

$$F(\lambda K, \lambda L) = L^\alpha F(K, L)$$

Si $\alpha = 1$, alors les rendements d'échelle sont constants

Si $\alpha < 1$, alors les rendements d'échelle sont décroissants

Si $\alpha > 1$, alors les rendements d'échelle sont croissants.




$f(O) = 0$

$f(\infty) \to \infty$

$v = \frac{K}{Q}$ où $v$ étant le coefficient de capital

$\to \frac{1}{v} = \frac{Q}{K} = \frac{q}{k}$

Tangente $\widehat{POM} = \frac{1}{v}$

Les facteurs de production sont rémunérés à la productivité marginale

$f'(k) = P(\text{ente de la tangente})$

Rajouté à cela, le rendement d'échelle constant, la rémunération épuise le produit.

- ➔ Théorème d'Euler
  $Q = F(K, L) = KF'_K + LF'_L = \rho K + wL$

Le salaire par tête est représenté par le segment OW sur le graphique

$w = q - pk$

$\rho = \frac{WN}{NP} = \frac{WN}{k}, WN = \rho k$

$w = OW$

S représente l'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées

$SO = \frac{w}{\rho}$

$\rho = \frac{OW}{SO}$

$\widehat{NPW} = \widehat{WSO}$

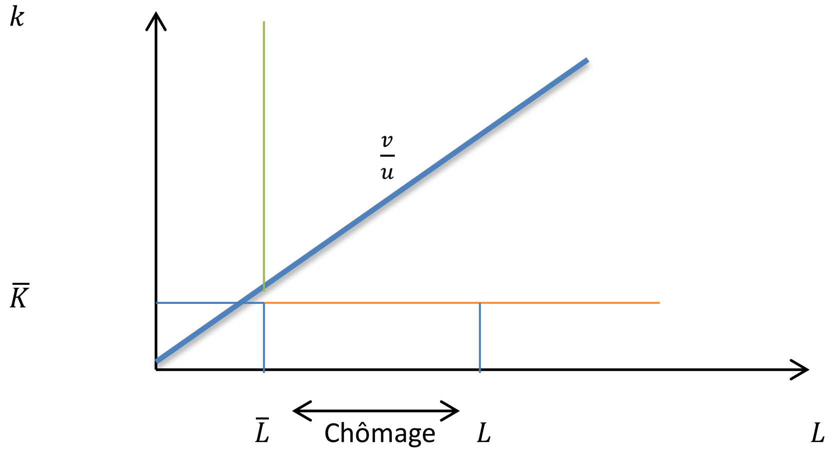
Pour une unité de produit $u, v$ , il faut une unité de travail $L, K$. Les quantités de travails sont donc strictement déterminées par les conditions techniques.

$Q = Min\left(\frac{L}{u}, \frac{K}{v}\right)$

Il n'existe qu'une seule technique qui permette le plein emploi des facteurs de production :

$\frac{K}{L} = k = \frac{v}{u}$

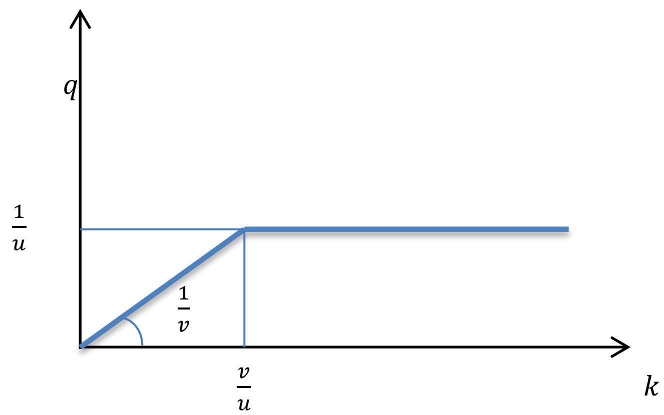
Cela peut ne pas être vérifié, par excès de travail ou de capital. Cette fonction est toujours une fonction homogène de degré 1, ce qui revient à dire que les rendements sont constants.




$$q = \frac{Q}{L} = Min\left(\frac{1}{v}, \frac{k}{v}\right)$$

$$Si\ k < \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{k}{v} < \frac{1}{u} \Rightarrow q = \frac{k}{v}$$

$$Si\ k > \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{k}{v} > \frac{1}{u} \Rightarrow q = \frac{1}{u}$$




C. Le principe d'accélérateur

Les fluctuations de l'activité sont bien plus considérables dans le secteur des biens de production que dans celui des biens de consommations, d'où l'hypothèse que l'investissement est induites par les variations de la demande finale. Un des fondements du principe de l'accélérateur, c'est le coefficient de capital constant. 2 façons :

- Une fonction de production aux facteurs complémentaires
- Sinon, les prix doivent être fixes $\frac{w}{p} = \frac{F'_L}{F'_K}$

a. L'investissement à partir du programme du producteur

Soit $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$, une fonction de production, que l'on minimise$Min\ wL + \rho K$ , $P$, le prix de vente du bien, de l'output, le tout sous la contrainte $PQ = \bar{Q}$

$\mathcal{L}: wL + \rho K + \lambda[\bar{Q} - PK^{\alpha}L^{\beta}]$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda P\beta K^{\alpha}\, L^{\beta-1} = 0$ 1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \rho - \lambda P\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = 0$ 2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = PK^{\alpha L^{\beta}} - \bar{Q} = 0$ 3)

1) $w = \lambda\beta P\frac{Q}{L}$
2) $\rho = \lambda\alpha P\frac{Q}{L} \Rightarrow Q = \frac{\rho K}{\lambda\alpha P}$

1) & 2) $\Rightarrow$

$$L = \frac{\lambda\beta PQ}{w} = \frac{\lambda\beta P}{w} * \frac{\rho L}{\lambda\alpha P}$$

$L = \frac{\rho K}{w} * \frac{\beta}{\alpha}$ 4)

4) et $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$ donnent

$$\log Q = \alpha\log K + \beta\log L$$

$$\log Q = \alpha\log K + \beta\log K + \beta\log\left(\frac{\rho}{w}\right) + \beta\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\log Q = (\alpha+\beta)\log K + \beta\log\left(\frac{\rho}{w}\right) + \beta\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\log K = \frac{1}{\alpha+\beta}\log Q + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\log\left(\frac{w}{\rho}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$\boldsymbol{Parenth\grave{e}se}: \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} = \dot{\boldsymbol{x}}, \frac{\boldsymbol{d\log x}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}}$, **tel que** $\boldsymbol{x(t)}$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{1}{\alpha+\beta} * \frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\dot{\overline{\frac{w}{\rho}}}\right) / \left(\frac{w}{\rho}\right)$$

Toujours la supposition que les rendements d'échelle sont constants

$\alpha + \beta = 1$

Et que le rapport des prix est lui aussi constant

$$\frac{\dot{w}}{\rho} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Q}}{Q}$$

$$\dot{K} = \frac{K}{Q} * \dot{Q} = v\dot{Q}, tel\ que\ v > 1$$

➔ Les variations du stock de capital sont bien plus importantes que celles du stock de bien

b. Le modèle simple de l'accélérateur

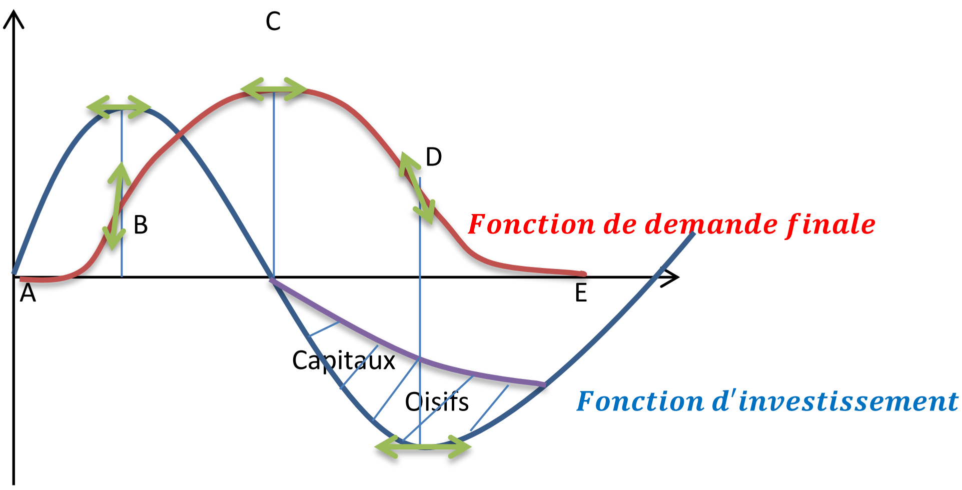
- Les hypothèses du modèle

1) La production s'adapte immédiatement à la demande
2) Il n'y a pas de capacité de production oisive
3) L'offre de biens d'équipement est parfaitement élastique, les réponses sont sans délais et à prix constant
4) L'offre de moyen de financement est parfaitement élastique à un coût inférieur à la rentabilité de l'investissement
5) La fonction de production est à rendement constant
6) Les coefficients de production sont fixes : Soit les facteurs sont complémentaires, soit les prix sont fixes (cf. plus haut)

$$\rightarrow Y = \min\left(\frac{K}{v}, \frac{L}{u}\right) \rightarrow \Delta Y = \frac{\Delta K}{v} = \frac{I}{v}$$

$$\rightarrow I = v\frac{dY}{dt} \rightarrow \frac{dI}{dt} = v\frac{d^2Y}{dt^2}$$

$$\Delta Y\ (Variations\ de\ production) = \Delta Z\ (Variations\ de\ demande)$$




Comme $v > 1$, on a une amplification des variations de la demande finale sur la variation des biens de production. Lorsqu'il y a potentiellement un désinvestissement, on n'assiste pas à une destruction de capital mais à l'apparition de capitaux oisifs.

Les hypothèses sont sévères car l'on peut admettre qu'il est rare qu'il n'existe pas de capital oisif. La parfaite élasticité de l'offre de biens d'équipement n'est pas compatible avec l'idée de plein emploi général. Elle est d'autant moins compatible par le fait que l'hypothèse de substitution capital/travail est exclue. Ou alors faire l'hypothèse qu'il y a sous-emploi dans le secteur des biens d'investissement et plein emploi dans celui des biens de consommation.

Il est rare que les entreprises cherchent à répondre immédiatement à la demande ; une partie de la demande peut être aussi comblé par l'exportation.

c. Les développements du modèle d'accélérateur

Dans le modèle simple, on fait l'hypothèse que le stock de capital effectif coïncide avec le stock de capital requis pour le niveau de production courant.

$K_t^* = vY_t$

$I_t = K_t^* - K_{t-1} = v(Y_t - Y_{t-1})$

*GOODWIN* et *CHENERY* ont proposé un modèle d'ajustement partiel du capital

$I_t = b(K_t^* - K_{t-1})$
$= bvY_t$
$- bK_{t-1}$, où $b$ représente la proportion d'écart entre $K_t^*$, représentant le stock d'effectif en $t$ et $K_{t-1}$,

le stock d'effectif en (t-1)

$$\frac{I_t}{K_{t-1}} = b\left( v \underbrace{\frac{Y_t}{K_{t-1}}}_{\substack{Mesure \\ de\ la \\ capacité \\ utilisé}} - 1 \right) \rightarrow Principe\ de\ capacité$$

On peut également relier le stock de capital non pas pour voir au niveau de production d 'une année mais pour voir celle des années précédentes, selon une moyenne pondérée, en faisant diminuer le poids des années à mesure qu'elles sont plus éloignés dans le temps. *KOYCK* utilise pour ça une progression géométrique :

$$K_t = \alpha(1-\lambda)(Y_t + \lambda Y_{t-1} + \lambda^2 Y_{t-2} + \cdots + \lambda^n Y_{t-n}), \qquad 0 < \lambda < 1$$

On va, à partir de cette expression, essayer de retrouver une fonction d'investissement :

$$\lambda K_{t-1} = \alpha(1-\lambda)(\lambda Y_{t-1} + \lambda^2 Y_{t-2} + \cdots \lambda^n Y_{t-n})$$

$K_t - \lambda K_{t-1} = \alpha(1-\lambda)Y_t$ , $\qquad \lambda^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

$K_t = \alpha(1-\lambda)Y_t + \lambda K_{t-1}$

$I_t = K_t - K_{t-1}$

$I_t = \alpha(1-\lambda)Y_t - (1-\lambda)K_{t-1}$

Il apparait, lorsque l'on regarde cette fonction d'investissement, que l'investissement une fonction croissante du niveau de la production et une fonction décroissante du stock de capital.

Remarque : On remarquera aussi que l'on n'est pas très loin de la formule de *GOODWIN* et *CHENERY*, si on supposait que :

- $b = 1 - \lambda$
- $v = \alpha$

(Fin de la remarque)

$I_t = bvY_t - bK_{t-1}$

$I_{t-1} = bvY_{t-1} - b$

Par défaut : $I_{t-1} = K_{t-1} - K_{t-2}$

$\rightarrow I_t - I_{t-1} = bv(Y_t - Y_{t-1} - b(K_{t-1} - K_{t-2})$

$I_t = bv\Delta Y_t + (1-b)I_{t-1}$

Il apparait que l'investissement net effectif est obtenu par la pondération d'un coefficient $b$ qui s'applique à l'accélérateur simple et d'un coefficient $1 - b$ qui s'applique à l'investissement de la période précédente (Délai d'ajustement).

- ➔ Si $b = 1$, l'ajustement se fait pendant la période
- ➔ Si $b = 0$, il n'y a pas d'ajustement

A partir de cette équation, on peut calculer la somme des investissements conduites par une variation des données du $Y_t$. Pour ça, on va commencer par duper la forme autorégressive en remplaçant les $I_t$ par $Y_{t-1}$

$$I_{t-1} = bv\Delta Y_{t-1} + (1-b)I_{t-2}$$

$$I_{t-2} = bv\Delta Y_{t-2} + (1-b)I_{t-3}$$

$$I_t = bv\Delta Y_t + (1-b)bv\Delta Y_{t-1} + (1-b)^2 bv\Delta Y_{t-2} + (1-b)^3 Y_{t-3}$$

$$I_t = bv\sum_{\theta=0}^{\infty}(1-b)\Delta Y_t - \theta + (1-b)^{\infty} I_{t-\infty}$$

- ➔ Pour une variation constante des $Y_t$, $\overline{\Delta Y}$ va donner sur un temps infini

$$\sum_{\theta=0}^{\infty} I_{t+\theta} = \overline{\Delta Y} bv \sum_{\theta=0}^{\infty}(1-b)^{\theta}$$

$$\sum_{\theta=0}^{\infty} I_{t+\theta} = \overline{\Delta Y} bv \frac{1-(1-b)^{\theta}}{1-(1-b)} = v\Delta Y \text{ pour } \theta = \infty$$

On peut facilement remonter de la forme de retard échelonnée à la forme autorégressive :

$$I_{t-1} = bv\sum_{v=1}^{\infty}(1-\mathrm{b})^{\mathrm{v}-1}\Delta Y_{t-\theta}$$

$$(1-b)I_{t-1} = bv\sum_{v=1}^{\infty}(1-b)^{\theta}\Delta Y^{*}_{t-\theta}$$

$$\text{d'où } I_t - (1-b)I_{t-1} = bv\left[\sum_{\theta=0}^{\infty}(1-b)^{\theta}\Delta Y_{t-\theta} - \sum_{\theta=1}^{\infty}(1-b)^{\theta}\Delta Y_{t-\theta}\right]$$

$$I_t = bv(Y_t - Y_{t-1}) + (1-b)I_{t-1}$$

C'est ce que l'on appelle le Transfert de *KOYCK*

A long terme, l'accélérateur simple et l'accélérateur flexible donnent les mêmes résultats mais à court terme, les résultats sont différents.

# Chapitre I

*Les premiers modèles de croissance*

## I. Le modèle de HARROD

Extrait de 2 articles, un en 39, un autre en 49, notamment pour résoudre les problèmes liés à la crise de 29, ce modèle développe 2 axes :

- ➔ Une préoccupation de court terme :
  L'ajustement entre l'investissement effectif et l'investissement d'équilibre (Investissement désiré par *HARROD*). Ça revient à l'égalité entre le taux de croissance effectif et le taux de croissance d'équilibre.
  On va s'apercevoir que tous les taux de croissance ne permettent pas d'équilibrer l'offre et la demande
- ➔ Une perspective de long terme : Egalité entre le taux de croissance d'équilibre et le taux de croissance « naturel »

### A. Les hypothèses du modèle

1) La capacité d'épargne globale est donnée par la proportion à épargner $s$, où $0 < s < 1$, d'où l'effet d'une multiplication de dépense, typiquement Keynésien : $\Delta Y = \frac{\Delta I}{s}$
2) Le comportement d'investissement est donnée par le principe d'accélérateur et
   Ex-post : $I = S, \forall S$
   Ex-ante : $D_{md}$ [1] $< O_{ff}$ [2]$, I < S$
3) C'est un modèle à prix fixe, y compris le taux d'intérêt $i$, le prix fixe permet de régler le modèle d'agrégation du capital (qui est une collection de bien hétérogènes)
4) Les prévisions sont imparfaites : effectivement les entrepreneurs peuvent se tromper en calculant un niveau d'investissement différent de l'épargne ex-ante
5) La population croît à un taux $n$, qui est un taux exogène (le taux de croissance naturel)

- Existe-t-il un équilibre de court terme ? Serait-il stable ?
- Existe-t-il un équilibre de long terme ? Serait-il stable ?

### B. Le premier problème d'*HARROD*

[1] $D_{md}$ : Demande
[2] $O_{ff}$ : Offre

L'incertitude du futur joue ce rôle de premier problème. L'action des entrepreneurs va conditionner l'évolution de l'activité économique ; ils décident du volume de production future à partir de l'anticipation de l'état futur des marchés, conditionnant le montant d'investissement pour réaliser l'objectif.

Les erreurs d'appréciation font apparaître un écart entre la production effective et la production d'équilibre, et l'écart initial tend à s'aggraver. Il existe un équilibre unique mais difficilement accessible et instable

1. Un taux de croissance garanti ; définition, existence, unicité

Il y aura un équilibre dynamique de court terme si les prévisions des entrepreneurs sont réalisées sans erreur. A l'équilibre le coefficient de capital et le taux de croissance sont nécessairement constant (les modèles d'états réguliers)

A l'équilibre les entrepreneurs sont satisfaits et maintiennent indéfiniment le taux de croissance

Modèle de *HARROD*

$$K = Y, \quad \frac{dK}{dt} = v\frac{dY}{dt}$$

$$I_t = \frac{dK_t}{dt} = v\frac{dY_t}{dt}$$

$$I_t = v\dot{Y}$$

A l'équilibre, ex-ante

$$v\dot{Y} = \mathrm{sY}$$

$$\Rightarrow y_t = \frac{\dot{Y}}{Y} \rightarrow y_t = \frac{s}{v}, \forall t$$

$$I_t = v(Y_{t+1} - Y_t)$$

| $t-1$ | $t$ | $t+1$ |
|---|---|---|
| $I_{t-1}$ | $I_t$ | $I_{t+1}$ |
| $\Delta Y_{t-1}^{Dmd} = \frac{1}{s}\Delta I_{t-1}$ | $\Delta Y_t = \frac{1}{s}\Delta I_t$ <br> $\Delta_t^{Off} = \frac{1}{v} I_{t-1}$ | $\Delta Y_{t+1}^{Dmd} = \frac{1}{s}\Delta I_{t+1}$ <br> $\Delta Y_{t+1}^{Off} = \frac{1}{v} I_t$ |

$$\Delta Y_{t+1}^{Dmd} = \Delta Y_{t+1}^{Off}$$

$$\frac{Y}{s}\Delta_{t+1} = \frac{1}{v} I_t, \forall t$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{s}{v}$$

➔ Le taux de croissance de l'investissement est égal au taux de croissance du produit

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{s}{v} = \frac{sY}{vY} = \frac{S}{vY} = \frac{I}{vY} \Leftrightarrow I = v\Delta Y = \frac{v\Delta Y}{vY} = \frac{\Delta Y}{Y}$$

2. L'instabilité de l'équilibre

Si on appelle $g^*$, le taux de croissance de l'équilibre

On suppose que le taux $g^* < g_t, g_t$ est égal au taux de croissance réel.

$$\rightarrow \frac{\Delta I}{I} > \frac{s}{v}$$

$I > S \rightarrow D_{md} > O_{ff} \rightarrow \Delta I$ croît $\rightarrow g_t$ croît $\rightarrow g_t \gg g^*$

On suppose que le taux $g^* > g_t$

$\rightarrow \frac{\Delta I}{I} < \frac{s}{v} \rightarrow I < S \rightarrow D_{md} < O_{ff} \rightarrow \Delta I$ décroît $\rightarrow g_t$ décroît $\rightarrow g_t \ll g^*$

C. Le second problème d'*HARROD*

On suppose que $g^* = g_t$ $(g_t = \frac{s}{v})$

La population évolue au taux $n$

$u =$ Coefficient de main d'œuvre

Demande de Travail :$N_t^D = uY_t$

Offre de Travail : $N_t^S = N_0 e^{nt}$

$$t = 0,\ N_0 = N_0^D = N_0^S$$

$$Y_t \max = \frac{N_t^S}{u} = \frac{N_0 e^{nt}}{u}$$

$Y_t \max = Y_0 e^{nt}$, $\quad u$ & $v$ sont fixes

Le taux $n$ étant le taux de croissance régulier que réalise, pour tout $t$, le plein emploin de la main d'œuvre et constitue également une limite de croissance pour l'économie en question dans la mesure où $u$ est constant.

A long terme, on doit pouvoir vérifier à tout moment que $n = \frac{s}{v}$ mais l'égalité ne sera vérifié que de manière fortuite puisque $\frac{s}{v}$ et $n$ sont 3 données indépendantes et constante. Même si elle pouvait varier, leur variation étant indépendante, il n'y aurait aucune raison pour qu'elle converge vers $\frac{s}{v} = n$

Soit $g^* > n, \quad g_t > n, \quad (g^* = g_t)$

$\rightarrow N_t^D$ décroît $\rightarrow g_t$ décroît $\rightarrow g_t < g^*$

Soit $g^* < n, \quad g_t < n$

$\rightarrow$ Equilibre possible mais chômage croissant ($N_t^S$ décroît)

Le déséquilibre étant la règle (pessimiste). Cela tient pour parti une rigidité des hypothèses : il ne suffirait pas de faire varier ces paramètres, il faudrait que ces variations ne soit ni incontrôlables, ni indépendantes.

## II. Le modèle de DOMAR

Ce modèle reprend l'idée que l'investissement en capital nouveau est une condition nécessaire de la croissance mais l'apparition d'une capacité non utilisée de ressources en capital inhibe ce mouvement et risque d'arrêter la croissance. La question reste sur le taux de progression de l'investissement.

### A. Hypothèses

En raison de techniques incorporés dans l'investissement en capital nouveau, il faut distinguer la capacité potentielle de production du nouvel équipement, obtenu par unité d'investissement engagée $\alpha$, à distinguer de l'accroissement de capacité productive potentielle de l'appareil productif tout entier $a$ avec $\alpha = \max a$

1) La capacité de production potentielle, c'est-à-dire de plein emploi de l'économie, peut être accrue grâce à l'investissement qui incorpore le progrès technique
2) En raison du progrès technique incorporé dans l'investissement en capital nouveau, il faut distinguer la capacité potentielle de production du nouvel équipement obtenu par unité d'investissement engagé $\alpha$ de l'accroissement de la capacité productive potentielle de l'appareil productif tout entier par unité d'investissement $a$ avec $\alpha = \max a$
3) L'augmentation de la capacité effective de production de l'équipement productif à la suite de l'engagement d'une unité d'investissement $\rho \leq a$, ce qui signifie que la croissance peut être supérieure à la croissance de plein emploi.
4) La propension à épargner $s$ est constante et exogène.

### B. Le modèle de DOMAR

#### 1. Démonstration du modèle

$I = \frac{dK}{dt} = K$

$Y^*$: Production globale potentielle

$\dot{Y}^* = aI \;\; (1)$

$\dot{Y}^* = \frac{1}{s}\dot{I} \; (2)$

$Y_t^* = Y_t \; (3) \forall t$

L'équilibre dynamique d'où :

$\dot{Y}^* = \dot{Y} \Leftrightarrow aI = \frac{\dot{I}}{s} \; de \; (1) et \; (2)$

$\frac{\dot{I}}{I} = as \leftrightarrow I_t = I_0 e^{ast} \; (4)$

$\rightarrow (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$

$Y_t$ va lui-même augmenter au taux $as$

$(2) \Rightarrow (2') \; s\dot{Y} = \dot{I}$

$(5) sY_t = I_t + A, \forall t$

Cette constante est nécessaire 0 à l'équilibre de plein emploi car :

$(6) \; sY_0 = I_0 + A,$ mais $sY_0 = I_0 \; (7)$

A l'équilibre $(S = I)$

$(6) \; et \; (7) \Rightarrow A = 0$

D'où $\forall t, sY_t = I_t = I_0 e^{ast}$ et avec $(7) \rightarrow Y_t = \frac{1}{s} I_0 e^{ast} = Y_0 e^{ast}$

$as \Leftrightarrow \frac{s}{v}$ de HARROD si $a = \alpha$

$\frac{Y_t^*}{K_t} = \frac{\dot{Y}}{I} = \alpha = \frac{1}{v}$

2. Dynamique de l'équilibre

On obtient un équilibre stable si

$\frac{\dot{I}}{I} < as \Rightarrow$ Capacités oisives en $K^{al}$

$i)\ a = \alpha, \qquad \rho = \frac{\dot{I}}{I}, \qquad \rho < as$

$(8) K_\sigma = K_0 + \int_0^\sigma I(t)dt$

$\rightarrow \int_0^\sigma I(t)dt = \int_0^\sigma I_0 e^{\rho t} dt = \frac{I_0}{\rho} e^{\rho\theta} - \frac{I_0}{\rho} e^{\rho\theta}$

D'où $K_\theta = K_0 + \frac{I_0}{\rho}\left(e^{\rho\theta} - 1\right)$ (8')

$$\frac{Y_\theta}{K_\theta} = \frac{Y_0 e^{\rho\theta}}{\left(K_0 - \frac{I_0}{\rho}\right) + \frac{I_0}{\rho} e^{\rho\theta}} = \frac{Y_0 e^{\rho\theta}}{\left(K_0 - \frac{I_0}{\rho}\right) + \frac{s}{\rho} Y_0 e^{\rho\theta}}$$

$\rightarrow S_t = I_t, \forall t$ à l'équilibre

$$\frac{Y_\theta}{K_\theta} = \frac{1}{\left(K_0 - \frac{I_0}{\rho}\right)(Y_0 e^{\rho\theta})^{-1}} + \frac{s}{\rho} \ (9)$$

$\lim_{\theta\to\infty} \frac{Y_\theta}{K_\theta} = \frac{\rho}{s}$, A l'équilibre par l'hypothèse : $\frac{Y_\theta^*}{K_\theta} = \alpha$

$\lim_{\theta\to\infty} \frac{Y_\theta}{Y_\theta^*} = \frac{\rho}{\alpha s} = \frac{\rho}{as}, \qquad (\alpha = a)$

Soit $\lambda = \lim_{\theta\to\infty} \frac{Y_\theta}{Y_\theta^*} = \frac{\rho}{as}$ (10)

A l'équilibre de plein emploi, $Y_0 = Y_\theta^*$

Si l'investissement croît à un taux $\rho < as$ alors $\lambda < 1$, se développe alors une capacité de production inutilisée égale à $1 - \lambda$ fois la production potentielle

ii) $a < \alpha$ Perte en capital d'un montant $I - \frac{a}{\alpha} I$

En effet : perte en capacité productive $(\alpha - a)I$ sur l'équipement en place

$a$ : Variation de capacité de production

$Q$ : Variation de capital

$\frac{Q}{\alpha}, \qquad I = \Delta K, \qquad \alpha I = Q, \qquad \Delta K = I = \frac{Q}{\alpha}$

D'où perte en capital $\frac{(\alpha - a)I}{\alpha}$

Montant d'investissement qui accroît réellement la capacité productive

$$I_t^{\alpha} = I_t - I_t\left(\frac{\alpha - a}{\alpha}\right) = \frac{aI_t}{\alpha}\ (11)$$

$$K_\theta = K_0 + \int_0^\theta I_t^a dt = K_0 + \int_0^\theta \frac{a}{\alpha} I_0 e^{\rho t} dt$$

$$K_t = K_0 + \frac{a}{\alpha\rho} I_0\left(e^{\rho\theta} - 1\right)(12)$$

$$\frac{Y_\theta}{K_\theta} = \frac{Y_0 e^{\rho\theta}}{\left(K_0 - \frac{aI_0}{\alpha\rho}\right) + \frac{asY_0 e^{\rho\theta}}{\alpha\rho}}$$

$$\frac{Y_\theta}{K_\theta} = \frac{1}{\left(K_0 - \frac{aI_0}{\alpha\rho}\right)(Y_0 e^{\rho\theta})^{-1} + \frac{as}{\alpha\rho}}$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{Y_\theta}{Y_\theta^*} = \frac{\alpha\rho}{as} \to \frac{Y_\theta^*}{K_\theta} = \alpha$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{Y_\theta}{Y_\theta^*} = \frac{1}{as}(14)\ \text{identique à}\ (10)$$

Dès que l'investissement cesse de progresser au taux régulier $\theta = as$, va se développer un sous-emploi aussi au niveau des ressources en capital qu'à celui de la main d'œuvre. Le paradoxe, c'est que si l'on investisse aujourd'hui, il faudra investir plus demain : en effet la croissance de la dépense induite pour l'investissement est temporaire et s'amortit peu à peu, alors que la capacité productive a été accrue durablement. Par rapport au chômage, l'investissement apporte une solution aujourd'hui mais prépare les problèmes de demain

## III. Modèle de *SOLOW-SWAN*

Ce modèle provient d'un article publié en 1958, visant à résoudre le second problème d'*HARROD*, concernant l'ajustement de $\frac{s}{v} = n$. Pour résoudre ce problème une des valeurs doit devenir variable ; ce sera le coefficient de capital $v$.

### A. Hypothèses

1) $\to L_t^S = L_0 e^{nt}$
2) $S_t = sY_t,\ \ S(i) = \frac{dS}{di} > 0$
3) Absence d'incertitude sur l'avenir (Information parfaite)
4) Plein emploi permanent de la main d'œuvre, modèle et salaire flexible
5) Fonction de production est à facteur substituable, elle est bien élevé, respectant les conditions d'*INADA*[3] $\dot{K}_t = sY_t,\ \ I_t = \dot{K}_t$

[3] Les conditions d'INADA : Soit une fonction à rendement constant $Y = F(K, L)$

B. Le cheminement vers l'équilibre à taux régulier

1. Existence de l'équilibre

Du fait des hypothèses du modèle, on peut montrer que quelque-soit le point de départ, l'économie convergera toujours vers un équilibre dynamique à taux régulier cette équilibre étant stable.

$$k_t = \frac{K_t}{N_t}, \log k_t = \log K_t - \log N_t$$

D'où $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{N}}{N}, \qquad \frac{\dot{N}}{N} = r$

$$\dot{K} = sY_t$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY}{K} - r = \frac{sf(k_t)}{k_t} - n$$

$$\dot{k} = sf(k_t) - nk_t = \Phi(k_t)$$

Equation dynamique fondamentale

$\dot{k} > 0$ si $sf(k_t) > nk_t \quad k \nearrow$

$\dot{k} = 0$ si $sf(k_t) = nk_t \quad k$ constant

$\dot{k} < 0$ si $sf(k_t) < nk_t \quad k \searrow$

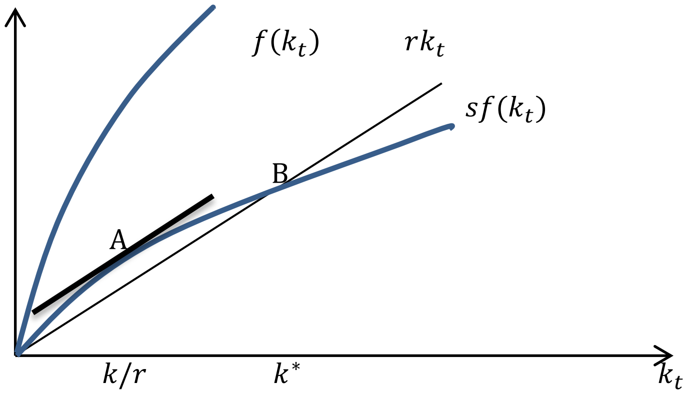
$\exists k^*$ racine de $\Phi(k_t) = 0$

Choix technique qui réalise l'équilibre dynamique à taux régulier $\frac{sf(k^*)}{k^*} = r$

---

$\rightarrow y = f(k)$
$\rightarrow f(0) = 0, \qquad f(\infty) = \infty$
$\rightarrow f'(0) = \infty, \qquad f'(\infty) = 0$
$\rightarrow f''(k) < 0$

Diagramme




$sf(k_t)$ vérifie les propriétés de $f$

- Pente verticale à l'origine
- Pente nulle pour $k_t \to \infty$
- Dérivées positives en chaque point et $sf'(k_t)$ décroît (??)[4] de $\infty$ à 0 quand $k_t$ croît
- $nk_t$ : Pente fixe $\Rightarrow \exists A / sf(k_t) - n$ **(??)**[4]

- Unicité de l'équilibre

En $B$, $sf'(k^*) < n$ si $C \ / \ k_c < k^*$

Et $sf(k_i) = nk_i$, alors $sf'(k_i) > n$

D'où $sf'(k^*) < n < sf'(k_i)$, contraire à l'hypothèse de décroissance de $f'$, $f''(k_t) \leq 0 \ \forall \ k_t$

2. La stabilité de l'équilibre

On suppose qu'un choc exogène nous amène à un point tel que $k_1 < k^*$

$k = sf(k_1) - nk_1 > 0 \Rightarrow k \nearrow$

$k_1 < k^* \quad k = sf(k_1) - k_1 > 0 \Rightarrow k \nearrow$

$k_1 > k^* \quad k = sf(k_1) - k_1 < 0 \Rightarrow k \searrow$

C. Equilibre néoclassique des consommations maximales : la règle d'or

[4] **Note manquante**

Dans une économie néoclassique, $\forall s \; \exists k^* \, / \frac{sf(k^*)}{k^*} = n$, $n$ étant l'équilibre

Y a-t-il un intérêt à modifier à long terme le comportement d'épargne même si ça ne modifie pas le taux de croissance ? Le but de cette modification étant de maximiser la consommation par tête.

Soit $c_t$, la consommation par tête

$$c_t = f(k_t) - sf(k_t)$$

$$\max c_t \; sc. \; sf(k_t) = nk_t \;\Leftrightarrow\; \max c_t = f(k_t) - nk_t$$

$$\frac{dc}{dk} = f'(k) - n = 0, \qquad f'(k) = n \; (1)$$

$$\frac{d^2c}{dk^2} = f''(k) < 0$$

Pour atteindre le maximum de consommation par tête, la société doit rémunérer le capital à un taux égal au taux de croissance de la population ($tx \; \pi \sim 2\%$).

(1) devient $f'(k_t)\,\frac{K_t}{Y_t} = \frac{nK_t}{Y_t}$ (2)

à l'équilibre $sf(k_t) = nk_t$

$$Soit : \frac{k_t}{f'(k_t)} = \frac{K_t}{Y_t} = \frac{s}{n}$$

donc (2) s'écrit $f'(k)\,\frac{K_t}{Y_t} = s$

Pour réaliser la consommation par tête maximal à tout instant, la société doit avoir un taux d'épargne égal à la fraction de revenu allant au capital. Le maximum de consommation par tête ne correspond pas nécessairement au maximum de production par tête : Pour accroitre encore la production, il faudra peut-être donc accroître au l'investissement mais dans des proportions supérieurs au taux de croissance de la production.

Cobb-Douglas réduite :

$$f(k) = k^\alpha$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - n$$

A l'état régulier :

$$\frac{d\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)}{dt} = 0 \Rightarrow s(\alpha - 1)\dot{k}k^{\alpha-2} = 0$$

$$s(\alpha - 1)\frac{\dot{k}}{k}k^{\alpha-1} = 0$$

$$0 < \alpha < 1, \qquad \forall s \neq 0 \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = 0 \Rightarrow \dot{k} = 0$$

Ceci est une conséquence de l'état régulier sans être la définition même de l'état régulier.

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}, \qquad \log k_t = \log K_t - \log L_t$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}, \qquad \dot{K} = sY_t$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY}{k} - n = \frac{sf(k)}{k} - n$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sk^{\alpha}}{k} - n = sk^{\alpha-1} - n$$

# Chapitre II

*Le progrès technique et la croissance*

Les modèles d'*HARROD* et *SOLOW* admettent un taux maximal de croissance qui est le modèle d'équilibre, qui est égale au taux de croissance de la population : Le taux de croissance de produit par tête est égal à 0. L'évolution de l'offre de facteurs productifs non cumulables, c'est-à-dire la main d'œuvre, qui fixe une limite au rythme de croissance réalisable. A mesure de l'accumulation, l'intensité capitalistique s'accroît, il s'en suit une diminution de la productivité marginale du capital, jusqu'au point où il devient inefficace d'accroitre $k$, c'est-à-dire le capital par tête ; à ce moment-là, la croissance devient purement extensive.

## I. Le progrès technique autonome

### A. Les définitions

On appelle *autonome* le progrès technique qui s'applique à toutes les générations de capital et de main d'œuvre sans tenir compte de leur âge, ce qui est relativement contre-intuitif. Le progrès technique apparait dans ce cas comme une déformation de la fonction de production au cours du temps, on peut le représenter en le faisant apparaître dans la fonction de production : $Y(t) = F(K(t)\,, L(t), t)$, fonction qui garde les propriétés d'INADA

$$\frac{\partial F}{\partial t} > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = F_L(K(t), L(t), t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = F_K(K(t), L(t), t)$$

Puisque cette fonction de production respecte les contions d'INADA, nous pouvons l'écrire sous forme réduite :

$$Y(t) = L(t)f(k(t), t), \qquad y(t) = f(k(t), t)$$

Ce progrès technique peut prendre des formes différentes au sens des 3 économistes suivants, ce qui va entrainer une classification du progrès technique en fonction des formes qu'il prend

- *HICKS*
- *HARROD*
- *SOLOW*

1. Le progrès technique au sens de *HICKS*

Pour *HICKS*, le progrès technique accroît indissociablement l'efficacité du capital et du travail : Améliore l'efficacité d'un des deux facteurs ? Dans une mesure supérieure, inférieure ou égale à l'efficacité de l'autre facteur ? Il s'agit d'une analyse de court terme.

On dira, en suivant *HICKS*, que pour $k$ donné, le progrès technique économise la main d'œuvre si, à son apparition, le TMS diminue, il économise le capital si, à son appariation, le TMS augmente, et reste neutre, si à son apparition, le TMS reste inchangé.

$$\mathrm{TMS}(\bar{k},t) = TMS(t) = \frac{F_L(\bar{k},t)}{F_K(\bar{k},t)}$$

$$\mathrm{T\dot{M}S} = \frac{\dot{F}_L - F_K - \dot{F}_K F_L}{F_K^2} = \frac{F_L}{F_K}\left(\frac{\dot{F}_L}{F_L} - \frac{\dot{F}_K}{F_K}\right)$$

$$\mathrm{T\dot{M}S} = \mathrm{TMS}\left(\frac{\dot{F}_L}{F_L} - \frac{\dot{F}_K}{F_K}\right)$$

$$\frac{\dot{F}_L}{F_L} > \frac{\dot{F}_K}{F_K} \Rightarrow \mathrm{T\dot{M}S} > 0 \text{ et TMS} \nearrow \text{, économise } K$$

$$\frac{\dot{F}_L}{F_L} < \frac{\dot{F}_K}{F_K} \Rightarrow \mathrm{T\dot{M}S} < 0 \text{ et TMS} \searrow \text{, économise } L$$

$$\frac{\dot{F}_L}{F_L} = \frac{\dot{F}_K}{F_K} \Rightarrow \mathrm{T\dot{M}S} = 0 \text{ et TMS } \mathit{neutre} \text{ au sens de } \mathit{HICKS}$$

Le progrès technique neutre selon HICKS laisse inchangé les parts du capital et du travail dans le revenu national. A l'optimum :

$$\mathrm{TMS} = \frac{w}{\rho} \ , \qquad \mathrm{T\dot{M}S} = \left(\frac{\dot{w}}{\rho}\right)$$

$$\frac{wL}{\rho K} = \left(\frac{w}{\rho}\right)/k \ = \alpha$$

$$\text{Economise L}, \mathrm{T\dot{M}S} = \left(\frac{\dot{w}}{\rho}\right) < 0$$

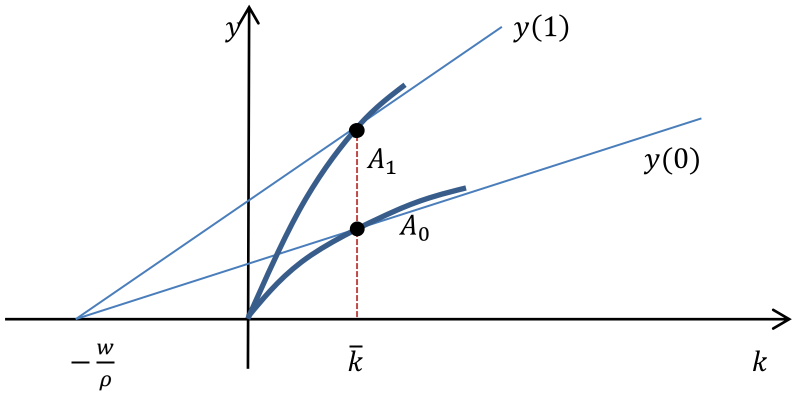
$$\text{Economise K}, \mathrm{T\dot{M}S} = \left(\frac{\dot{w}}{\rho}\right) > 0$$

$$\text{Neutre}, \mathrm{T\dot{M}S} = \left(\frac{\dot{w}}{\rho}\right) = 0$$

$k$ donné $\Rightarrow \dot{\alpha} = \left(\frac{\dot{w}}{\rho}\right)$

$\dot{\alpha} < 0, \qquad \alpha \searrow$ : la part de $L \searrow$

$\dot{\alpha} > 0,\ \alpha \nearrow$ : la part de $K \searrow$




2. Le progrès technique au sens de *SOLOW*

Le progrès technique au sens de *SOLOW* accroît l'efficacité du facteur capital

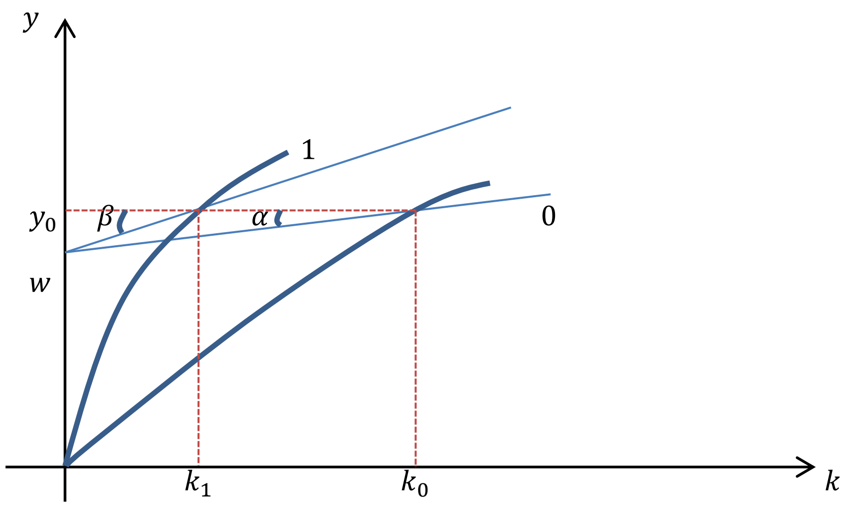
On dira pour un taux de salaire $w$ donné, le progrès technique au sens de *SOLOW* économise le capital si le coefficient de travail $u$ augmente, il économise le travail si $u$ diminue, il est neutre si $u$ est égale à une constante. On peut dire aussi qu'il est neutre si $\frac{L}{Y}$ est une constante et si $w$ est une constante aussi.

$Y = F(a(t)K, L)$

$a(0) = 1, \qquad a'(t) > 0$

$\frac{wL}{\rho K} = \text{constante} \ / \ \frac{L}{Y} = \text{constante}$

$w\frac{L}{Y}\left(1 - w\frac{L}{Y}\right)^{-1} = \text{constante} \ / \ \frac{L}{Y} = \left(\frac{L}{Y}\right)_0$




3. Le progrès technique au sens d'*HARROD*

Ce progrès technique accroît l'efficacité du facteur travail.

Le taux du profit sera supposé donnée et le progrès technique économise la main d'œuvre si le coefficient de capital $v$ augmente, il économise du capital si $v$ diminue et reste neutre si $v$ est nul

$\rho = \bar{\rho}$

$v = \frac{K}{Y}, \qquad \dot{v} = \frac{Y\dot{K} - K\dot{Y}}{Y^2} = \frac{K}{Y}\left(\frac{K}{\dot{K}} - \frac{\dot{Y}}{Y}\right)$

$\dot{v} = v\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{Y}}{Y}\right)$

$v > 0 \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} > \frac{\dot{Y}}{Y}$, économise le travail

$v < 0 \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} < \frac{\dot{Y}}{Y}$, économise le capital

$v = 0 \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y}$, neutre

Le progrès technique selon *HARROD* ne modifie pas la répartition des revenus.

$Y = \rho K + wL, \qquad 1 = pv + wu$

$\rho = pv, \qquad \dot{\rho} = \bar{\rho}\dot{v}$

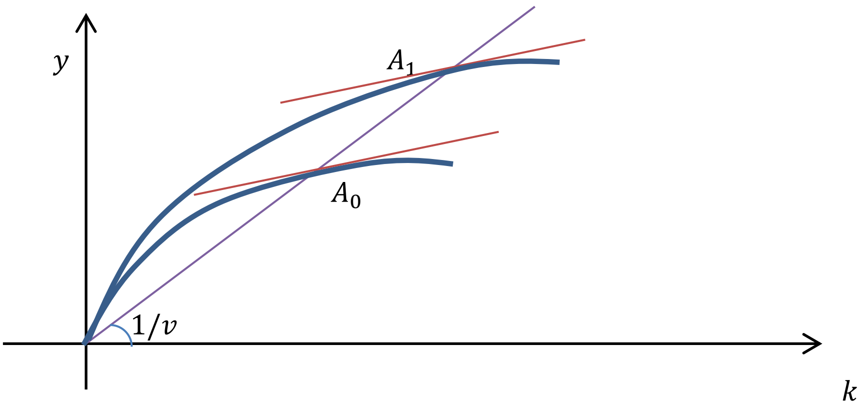
$\dot{v} > 0 \Rightarrow \dot{\rho} > 0$ améliore la part relative du $K$ (capital)

$\dot{v} < 0 \Rightarrow \dot{\rho} < 0$ améliore la part relative du $W$ (travail)

$\dot{v} = 0 \Rightarrow \dot{\rho} = 0$ Pas de modification

$$\frac{wL}{\rho K} = \text{constante } tel\ que \frac{K}{Y} = \left(\frac{K}{Y}\right)_0$$

$$\frac{1 - \rho\left(\frac{K}{Y}\right)}{\rho\left(\frac{K}{Y}\right)}$$




Les tangentes sont parallèles, $\bar{p}$ représente la pente de la tangente en $A$

Le taux de profit est égale à la productivité marginale du capital, qui est mesuré en quantité physique du capital parce qu'on est dans un modèle à un seul bien (bien de consommation et bien de capital à la fois)

Le modèle du progrès technique utilisable est celui de HARROD par l'augmentation à la fois du capital par tête et celui du produit par tête, ce qui correspond en gros à ce que l'on observe dans l'histoire.

Au sens de SOLOW, le produit par tête stagne et le capital par tête diminue, qui finit par disparaître au fur et à mesure de l'écoulement du temps.

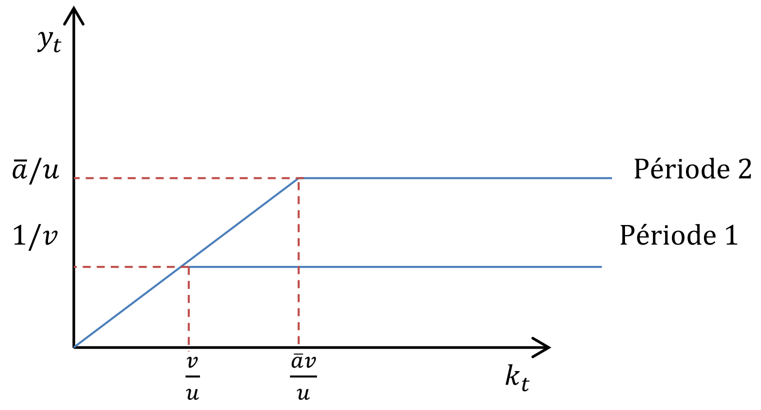
Progrès technique neutre au sens de HARROD

$Y(t) = \min\left(\frac{K_t}{v}; \frac{a(t)N_t}{u}\right) \rightarrow$ Fonction de production à facteurs complémentaires, rendements d'échelles constants

$$y(t) = \min\left(\frac{k_t}{v}; \frac{a(t)}{u}\right), \quad a(1) = \bar{a}$$

$$k_t < \frac{\bar{a}_t}{u} \quad y = \frac{k_t}{v}$$

$$k_t > \frac{\bar{a}v}{u} \quad y = \frac{\bar{a}}{u}$$




Il existe un cas où le progrès technique est neutre au sens de HICKS, SLOW et HARROD, c'est quand on a affaire à une COBB-DOUGLAS

- $Y = e^{\lambda t}K^{\alpha}L^{1-\alpha}$
  $\lambda > 0$, Progrès technique neutre au sens de HICKS au taux $\lambda$
- $Y = K^{\alpha}\left[e^{\lambda t(1-\alpha)^{-1}}L\right]^{1-\alpha}$
  Neutre au sens de HARROD au taux $\frac{\lambda}{1-\alpha}$
- $Y = L^{1-\alpha}\left[e^{\lambda t\alpha^{-1}}K\right]^{\alpha}$
  Neutre au sens de SOLOW au taux $\frac{\lambda}{\alpha}$

B. Le progrès technique dans les modèles de croissance

On va voir les modifications engendrées par le progrès technique. On va commencer à montrer que le seul point d'équilibre qui convienne est celui qui améliore le capital, c'est-à-dire le modèle de HARROD

1. Nécessité d'un progrès technique qui accroît l'efficacité du travail

Seul le progrès technique qui améliore l'efficacité du travail est compatible avec l'état régulier. On fait la démo :

$Y = F[K * B(t); L * A(t)]$, Rendement constant

Si $B(t) = A(t)$, le progrès technique est neutre au sens de HICKS.

$B(t) = B_0 e^{zt}$, avec $B_0 = 1$

$z$ étant le taux de progrès technique qui améliore l'efficacité du capital

$A(t) = A_0 e^{xt}$, avec $A_0 = 1$

$x$ étant le taux de progrès technique appliqué au facteur travail

Puis que cette fonction de production est à rendements constants, on peut l'écrire :

$$\frac{Y}{K} = e^{zt}\varphi\left[\left(\frac{L}{K}\right)\left(e^{(x-z)t}\right)\right], \text{avec } \varphi\left[\left(\frac{L}{K}\right)\left(e^{(x-z)t}\right)\right] \equiv F\left[1, \frac{L * A(t)}{K * B(t)}\right]$$

On peut établir une autre propriété : $L$ croît à taux constant $n$ et $\gamma_K^*$ est un taux de croissance constant de $K$ à l'état régulier. On va poser $L_0 = 1,\ K_0 = 1$

L'équation s'écrit : $\frac{Y}{K} = e^{zt}\varphi\left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right]$

On peut se souvenir que $\gamma_K = s\frac{Y}{K}$

A l'état régulier, $\gamma_K$ est constant (par défaut). Par conséquent, $\frac{Y}{K}$ est constant car $s$ est une variable exogène constante.

On en déduit que $e^{zt}\varphi\left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right]$ doit être constant. Une solution pour que ce soit constant : il faut $z = 0$ et $\gamma_K^* = n + x$

→ Le Progrès technique est bien neutre au sens de HARROD, donc on a la fonction $Y = F(K, A(t)L)$

Supposons $z \neq 0$, pour que $\frac{Y}{K}$ soit constant, il faut $\varphi\left(e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right)$ doit compenser les variations de $z_t$

On doit avoir : $\frac{\dot{Y}}{\dot{K}} = 0$

On pose $e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t} = \chi$

On dérive par $t$ :

$$ze^{zt}\varphi(\chi) + e^{zt}\varphi'(\chi)(n + x - z - \gamma_K^*)\chi = 0$$

→ On dérive : $\frac{\varphi'(\chi) * \chi}{\varphi(\chi)} = -\frac{z}{x + n - z - \gamma_K^*}$

On peut poser $\varphi(.) = \text{constante } \chi^{1-\alpha}$

Explication :

$$[(\chi)^{1-\alpha}]' = (1-\alpha)\chi^{-\alpha}$$

$$\frac{(1-\alpha)\chi^{-\alpha}\chi}{\chi^{1-\alpha}} = 1 - \alpha$$

A partir de là, on remonte la fonction de production, on peut écrire :

$$\frac{Y}{K} = e^{zt} * \text{constante } \left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right]^{1-\alpha}$$

$$\left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right]^{1-\alpha} = (Le^{xt})^{1-\alpha}(Ke^{zt})^{\alpha-1}$$

$\rightarrow Y = \text{constante } Ke^{zt}(Le^{xt})^{1-\alpha}(Ke^{zt})^{\alpha-1}$

$= \text{constante } (Ke^{zt})^{\alpha}(Le^{xt})^{1-\alpha}$

$= \text{constante } K^{\alpha}e^{zt\alpha}(Le^{xt})^{1-\alpha}$

$$= K^{\alpha}\left(Le\frac{z\alpha + (1-\alpha)}{1-\alpha}t\right)^{1-\alpha} = K^{\alpha}\left(Le\left(\frac{zx}{1-\alpha} + x\right)t\right)^{1-\alpha}$$

$$v = \frac{zx + x(1-\alpha)}{1-\alpha}$$

Le progrès technique améliore l'efficacité du travail → Solow.

2. Conséquences d'un progrès technique neutre au sens de HARROD

On suppose une main d'œuvre sachant que la main d'œuvre rend exogène $n$

$N_t^s = N_0^s e^{nt}$

Avec le progrès technique neutre au sens de HARROD, on peut réécrire la main d'œuvre en multipliant la quantité de main d'œuvre par un taux de progrès technique car le progrès technique fait croître le taux de main d'œuvre c'est ce qu'on appelle par la suite, la main d'œuvre efficace

$\bar{N}_t^s = e^{\lambda t}N_0^s e^{nt}$, avec $a(t) = e^{\lambda t}$, $\quad \lambda > 0$

$\bar{N}_t^s = N_0^s e^{(n+\lambda)t}$

A partir de là, on peut écrire la fonction de production

$$Y(t) = K_t^{\alpha}\left(e^{\lambda t}N_t\right)^{1-\alpha} \rightarrow \text{Cobb-Douglas}$$

Puisqu'en l'absence de progrès technique, la limite était $n$, donc ici avec le progrès technique, la limite sera $n + 1$

Si on a $\frac{s}{v} = n$ en taux de croissance, on aura $n + \lambda = \frac{s}{v}$

Dans ce genre de modèle, on retrouve une nouvelle technique avec $v -$ coeff $k$

$\bar{k}_t =$ Capital par tête efficace

$\bar{N}_t = e^{\lambda t}N_t, \qquad \bar{k}_t = \frac{K_t}{\bar{N}_t}$

$$\frac{Y_t}{\bar{N}_t} = \bar{y}_t = \bar{k}_t^{\alpha}$$

$\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{\bar{N}}}{N} = \frac{sY_t}{K} - (n+\lambda)$, en raisonnant en capital par tête efficace

$$= \frac{s\bar{y}_t}{\bar{k}_t} - (n+\lambda) = \frac{s\bar{k}_t^{\alpha}}{\bar{k}_t} - (n+\lambda)$$

On isole $\dot{\bar{k}}$ → Equation dynamique fondamentale

$$\dot{\bar{k}} = s\bar{k}_t^{\alpha} - (n+\lambda)\bar{k}_t$$

→ De cette équation différentielle, on peut chercher sa solution ; elle admet la solution suivante :

$$\bar{k}_t = \left[\left(\bar{k}_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\lambda}\right) e^{-(n+\lambda)(1-\alpha)t} + \frac{s}{n+\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$\bar{k}_0$ ⇒ Capital par tête à la période 0

$n+\lambda > 0, \qquad 1-\alpha > 0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(n+\lambda)(1-\alpha)t} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \bar{k}_t = \left(\frac{s}{n+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \bar{k}_* \rightarrow \text{valeur d'équation}$$

Donc on obtient la valeur de $\bar{k}_*$ → Capital par tête efficace qui assure l'état régulier

A partir de cette valeur, on peut calculer le taux de croissance car on connait $k_*$

$$\boldsymbol{g} = \frac{s}{v^*} = \frac{s}{\bar{k}_*/f(\bar{k}_*)} = \frac{s}{\bar{k}_*/\bar{k}^{*\alpha}} = s\bar{k}^{*\alpha-1} = \boldsymbol{n+\lambda}$$

Le taux de croissance de l'économie va être supérieur maintenant au taux de croissance de la population, donc on a une croissance produit par tête ce qui n'était pas le cas dans le modèle sans le progrès technique

Le produit par tête croît au rythme du progrès technique $\lambda$

Remarque : La croissance reste exogène, plus exactement l'explication de la croissance reste exogène, aucune référence n'est faite à des mécanismes incitatifs qui ferait du progrès technique le résultat des choix des agents. On n'a pas d'hypothèses qui explique comment et pourquoi on a du progrès technique.

Dans ce modèle, le progrès technique est un bien libre dont le prix est nul. En effet, la rémunération des facteurs de production épuisent le produit, par conséquent il ne reste rien pour le progrès technique.

3. Le modèle de SOLOW-SWAN avec progrès technique et dépréciation du capital (Cas général)

Dépréciation du capital → On suppose qu'à chaque période du capital disparaît (par usure, obsolescence…)

Si à chaque période, une partie du capital disparaît, on a :

$\dot{K} = I - \delta K$, où $\delta$ = Taux de dépréciation du capital $> 0$

$\dot{K} = sF\big(K, LA(t)\big) - \delta K$

$\rightarrow$ Par hypothèse $I^{Total} = s$

$\dot{k} = sF\big(k, A(t)\big) - (n + \delta)k$

$\rightarrow$ On utilise avec capital par tête

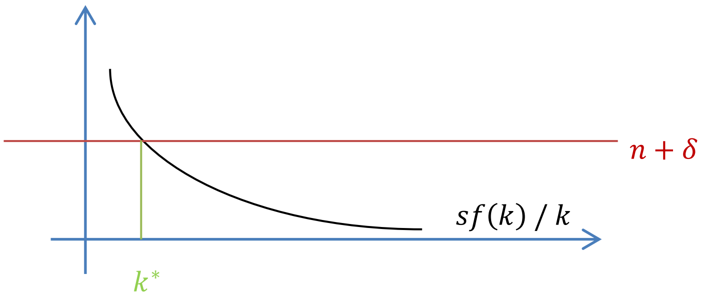
$$\frac{\dot{K}}{L} = sF\big(k, A(t)\big) - \delta k$$

$$\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}$$

$L = L_0 e^{nt}, \qquad nL_0 e^{nt} = nL$

$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = sF[k, A(t)] \ / \ k - (n + \delta)$$




$sf(k) \ / \ k$ se déplace vers la droite des abscisses à mesure du temps en raison du terme $e^{\lambda t}$

Le nombre de capital par tête croît continuellement & on peut calculer $\gamma_K$ à l'état régulier .

Par défaut, $\gamma_K^*$ est constant, $\frac{F(k,A(t))}{k}$ doit être constant puisque $s, n$ et $\delta$ sont des constantes.

Par défaut $F\left(1, \frac{A(t)}{k}\right) = \frac{F(k,A(t))}{k}$

Et ceci ne sera constant que si $k$ et $A(t)$ croissent au même rythme $\Rightarrow \varphi_K$ = taux croissant,

Progrès Technique $= A(t)$

$\bar{y} = kF\left(1, \frac{A(t)}{k}\right) \rightarrow$ taux croissant produit par tête $=$ taux du PT

Consommation $\rightarrow c = (1 - s)y$

Taux de croissance de la consommation par tête = taux de croissance du PT

Par exemple : $A(t) = e^{xt}$

$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = x \neq$ avec le modèle sans progrès technique $\left(\gamma_K = \gamma_Y = \gamma_C = n + x\right)$

L'économie toute entière a un taux de croissance égale à $n + x$ et par tête, ce sera un taux de croissance de $x$

On reformule le système à l'aide de variables à l'état régulier (par tête efficace)

$$\hat{k} = \frac{k}{A(t)} = \frac{K}{L * A(t)} \rightarrow \hat{L} = L * A(t)$$

$$\hat{y} = \frac{Y}{L * A(t)} = F\left(\hat{k}, 1\right) = f\left(\hat{k}\right)$$

La fonction de production est réduite car le rendement d'échelle est constant. On peut retrouver la relation entre les variables

$$\frac{\dot{K}}{\hat{L}} = sF\left(\hat{k}, 1\right) - \delta\hat{k} \rightarrow \dot{\hat{k}} = \frac{d\left(\frac{K}{\hat{L}}\right)}{dt} = \frac{\dot{K}\hat{L} - K\dot{\hat{L}}}{\hat{L}^2}$$

$$\hat{L} = L_0 e^{(x+n)t} \rightarrow \dot{\hat{L}} = (x+n)L_0 e^{(x+n)t}$$

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{\hat{L}} - (n+x)\hat{k} \rightarrow \dot{\hat{k}} = \underbrace{sf\left(\hat{k}\right)}_{\substack{\text{épargne} \\ \text{par tête}}} - \left(\underbrace{x+n}_{\text{Dotation}} + \underbrace{\delta}_{\substack{\text{Dépréciation} \\ \text{du capital}}}\right)\hat{k}$$

Cette formule nous donne l'épargne par tête efficace moins ce qu'il faut pour doter les têtes efficaces en capital et on retire la dépréciation du capital

$$\gamma_{\hat{k}} = sf\left(\hat{k}\right) / \hat{k} - (x + n + \delta)$$

Par défaut à l'état régulier $\gamma_{\hat{k}}^* = 0$, puisque $k$ et $A(t)$ croissent au même taux, or $\hat{k} = \frac{k}{A(t)}$

Par conséquent à l'équilibre, $\gamma_{\hat{k}}^* = 0$ ce qui signifie qu'à l'équilibre, on aura :

$$sf\left(\hat{k}^*\right) = (x + n + \delta)\hat{k}^*$$

Donc, on obtient cette fois un équilibre où la variation qui permet de calculer le taux de croissance du système, croît à taux 0

→ C'est une conséquence de l'état régulier et non une cause !

<u>A l'état régulier $\hat{k}, \hat{y}, \hat{c}$ sont constant car $k, y, c$ croissent au taux $x$ (celui du progrès technique) et $K, Y, C$ (variable globales) croissent au taux $x + n$.</u>

Dans ce modèle-là, on peut tout faire partir de :

$\dot{K} = sF(K, LA(t)) - \delta K$

Une fois cette formule générale, on retrouve toutes les autres formules !

L'introduction du progrès technique change le taux de croissance → $n + x$

Le reste du modèle reste inchangé.

## II. Progrès technique incorporé et modèles à générations de capital

### A. Le progrès technique incorporé

Jusqu'à présent, on a considéré que l'économie était complètement et instantanément adaptée à la technologie la plus avancée. Donc le progrès technique apparaît comme une *manne tombée du ciel*.

Il est plus réaliste de considérer que le progrès technique ne s'applique qu'aux nouvelles générations de capital donc il était incorporé dans les nouvelles machines au moment de leur mise en œuvre → on va considérer l'investissement total brut et non net.

On incorpore du progrès technique même si c'est seulement du remplacement de capital ancien. A chaque moment coexistent dans l'économie des machines mises en œuvres à des dates différentes, elles incorporent donc des techniques différentes qui furent les plus productives au moment de leur mise en œuvre ; donc il y a un double lien entre investissement total nouveau et progrès technique et entre durée de vie des machines et le progrès technique. En moyennant *Ceteris paribus* (toute chose étant égale par ailleurs) un raccourcissement de la vie des machines va accélérer le progrès technique puisqu'on va incorporer davantage de progrès techniques. Ce qui va voler en éclats dans ce modèle, c'est l'homogénéité du capital (elle disparait) par que les machines conservent toujours la technologie de leur date de construction.

Il s'en suit que les machines construites à des dates différentes sont qualificativement différentes, c'est pour cela que l'on parle de modèle à génération de capital. Par conséquent, on ne peut pas agréger ces machines différentes en une mesure simple du capital. Le résultat est qu'il y aura autant de fonction de production que de génération de capital en service et la production totale sera la somme de toutes les productions des générations de capital en usage.

$Y_{0t}$ est la production réalisé en $t$ sur l'équipement installé en $v$ avec $v \leq t$. Cette production dépend à la fois des machines installées en $v$ et encore disponible, on notera $K_{vt}$, et enfin dépend du nombre de travailleurs employés en $t$ sur l'équipement installé en $v$, on notera $N_{vt}$, ça dépend également du progrès technique, noté $H_v$, apparu en $v$ et incorporé aux machines construites en $v$.

$Y_{v_1 t} = F(H_v; K_{v_1 t}; L_{v_1 t})$

$Y_{v_1 t} = Ae^{\lambda v} K_{v_1 t}^{\alpha} L_{v_1 t}^{1-\alpha}$

Une fois qu'on a cette fonction de production, on peut calculer :

$$Y_t = \int_{-\infty}^{t} Y_{v_1 t}\, du$$

Si on considère que les machines ont une durée de vie max, on peut écrire :

$$Y_t = \int_{t-T}^{t} Y_{v_1 t}\, du$$

- Définition de progrès technique incorporé

Cette notion de progrès technique incorporé qui conduit à l'abandon de l'hypothèse d'homogénéité et d'adaptabilité du capital suscite une interrogation sur la substituabilité capital/travail.

Par exemple : si l'entrepreneur a le choix entre plusieurs techniques dans notre modèle, c'est-à-dire le choix entre différents rapports capital/travail ; $i$ peut perdre toutes libertés de substitution une fois la machine acheté. C'est-à-dire que chaque machine va fonctionner avec un nombre d'ouvriers donné. On dit que le capital est PUTTY-CLAY → on ne peut plus modifier le rapport après installation. Si la substitution est possible à tout moment, on dit qu'on a affaire à un modèle PUTTY-PUTTY. Dans le dernier cas, on a le modèle CLAY-CLAY → on ne peut pas substituer.

B. Le modèle à génération de capital de JOHANSEN

1. Les hypothèses du modèle

C'est un modèle CLAY-CLAY. Un produit unique destiné à la consommation comme à l'investissement total est fabriqué avec du travail homogène et bien sûr avec un ensemble de machines qualitativement différentes sachant que les moyennes de productions ne diffèrent que par leur productivité. Le progrès technique est exogène, il est incorporé dans les machines dans plus récentes à taux constant et c'est un progrès technique neutre au sens de HARROD. Le progrès technique pourrait être incorporé dans le capital mais amélioré l'efficacité du facteur travail. De la plus grande efficacité du capital nouveau se manifeste par le fait que la production par tête est plus élevée sur les équipements nouveaux que sur les anciens. Evidemment, une fois l'équipement en place sur cet équipement-là, la production par tête sera constant et cela durant toute la vie de l'équipement.

$Y_v = \dfrac{Y_v}{N_{dv}}$ → Le travail utilisé par la production au temps $n$

$$Y_v = Y_0 e^{nv}, \qquad Y_0 = \frac{Y_0}{N_{d0}}$$

$m$ représente le taux d'accroissement constant de la production par tête sur les équipements nouveaux. Et pour l'équipement en quantité, on aura pour toute l'année $t$ postérieure à $v$

$\rightarrow Y_v = Y_0 e^{mt}$

Puisque le progrès technique n'améliore que le facteur travail, la productivité moyenne du capital nouveau est constant ($\sigma$). Le produit par unité de capital ne change pas si :

$$dY_t = \sigma I_t$$

$$I_v \rightarrow Y_v = \sigma I_v$$

L'investissement total en $v$ crée une nouvelle capacité de production, et cet investissement total crée aussi une capacité d'emploi

$$N_{dv} = \frac{Y_v}{y_v} = \frac{\sigma I_v}{y_0 e^{mv}}$$

→ Emploi induit par génération de machine induite en $v$

Offre d'emploi : $N_t = N_0 e^{mv}$

A partir du moment où on a des emplois générés par des générations de capital successifs, si on fait la somme, on aura l'emploi total généré par l'ensemble des générations de capital.

On peut écrire la production totale :

$$Y_t = \int_{t-T}^{t} Y_{v_1 t}\, du$$

$$N_t = \int_{t-T}^{t} N_{v_1 t}\, du$$

Reste maintenant à s'intéresser à la durée de vie des machines ce qui va déterminer $t$. Ce qui va conditionner ce niveau de vie : les machines anciennes confrontées à des machines nouvelles de plus en plus performantes, d'où un phénomène d'obsolescence qui conduit alors au déclassement.

$Y_v$ : Machines fabriquées en $v$

$w_t$ : C'est le taux de salaire

Chaque unité d'équipement en $\Delta CT$ rapporte une quasi-rente qui représente l'excédent de productivité marginale du travail sur le salaire réel.

Quasi-rente → On ne peut pas parler de rente car c'est lié à la rareté et au droit de propriété sur la terre et le sous-sol. C'est s'accaparer un revenu du seul fait de propriété.

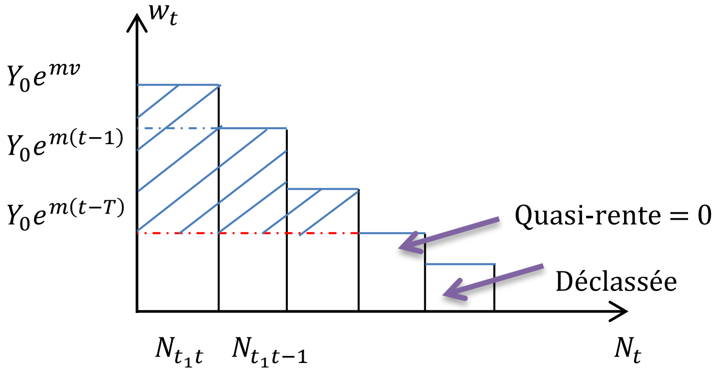
Cette rente devrait être partagée à l'humanité toute entière. Exemple : Si sous ma maison, il y a un puits de pétrole, je vais bénéficier d'une rente dû à un coup de chance.

On ne peut pas parler de profit car il faut un profit uniforme, car pas d'homogénéité des machines.

$$R_{v_1t} = \left( \underbrace{Y_0 e^{mv}}_{\substack{\text{Productivité} \\ \text{par tête}}} - \underbrace{w_t}_{tx \text{ salaire}} \right) \underbrace{N_{v_1t}}_{\substack{\text{Quantité d'emplois} \\ \text{sur cette} \\ \text{génération de} \\ \text{machines}}}$$

$Y_0 e^{mv}$ augmente régulièrement (avec $v$)

Par conséquent, $w_t$ qui est égal à la productivité marginale du travail augmente à mesure que le temps passe, subséquemment (oui, je l'ai utilisé !) il arrive un moment où la quasi-rente dévient nulle lorsque les générations de machines est ancienne au-delà, il faut déclasser l'équipement. Lorsque le salaire croît, il augmente de même manière peu importe la machine utilisée par le salarié/travailleur.




Cela détermine la durée de vie économique du capital qui ne correpond pas à la durée de vie physique. On peut penser que la durée de vie physique peut être déterminée par la durée de vie sociale (pas l'inverse) → Pas construction solides car on sait qu'on va le remplacer par une autre machine dans pas longtemps.

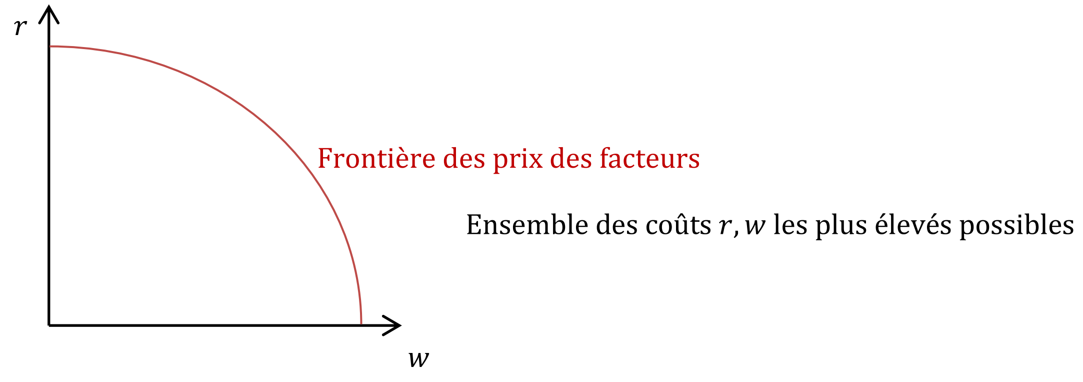
L'investissement total est déterminée par l'épargne disponible :

$$I_t = S_t = sY_t = K_{t_1t}$$

Le modèle comporte une règle de décision de l'investissement totale c'est-à-dire que la valeur actualisée des quasi-rentes doit être égale au prix d'offre des biens d'équipement, en l'occurrence = 1 car il y a un seul bien dans l'économie, c'est donc ce bien qui donne le numéraire. On a donc la relation suviante :

$$\sum_{t=v}^{v+t} R_{v_1t} \;/\; (1+r)^{v-t} = P_K(v) = 1$$

Les investissements totaux ainsi réalisés permettent l'équilibre $I = S$ et l'équation de décision d'investissement définis un taux de rendement actuarielle du système aussi appelé taux d'intérêt du système, lequel se substitut au taux de profit qui n'aurait pas de sens ici car il n'y a pas de stock de capital homogène. Comme $R_{v_1t}$ décroît, quand $w_t$ croît, $r$ décroît également lorsque $w_t$ croît et par conséquent, on peut définir une relation décroisante pour $r(w)$ qui est la fontrières des prix des facteurs de ce modèle où $r$ considére être le prix du capital et $w$ étant le prix du travail.



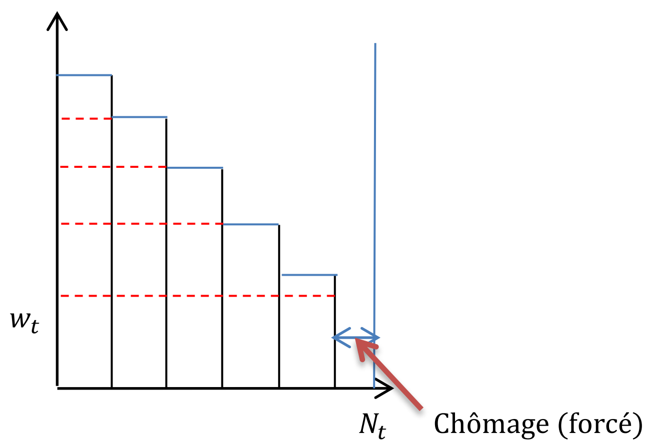

$N_0 e^{nt}$ = Point de départ du taux de croissance de population, qui croît au taux $N_t$

2. Le fonctionnement du modèle

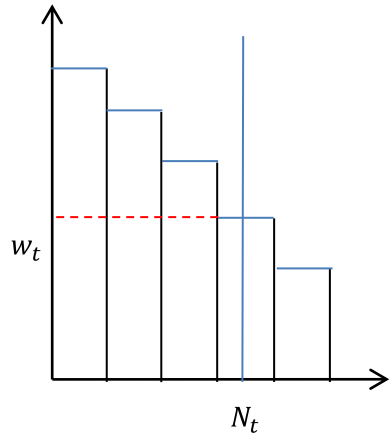
On peut envisager 3 régimes :

- L'excès de main d'œuvre
- Le plein emploi
- Le sous-emploi Keynésien

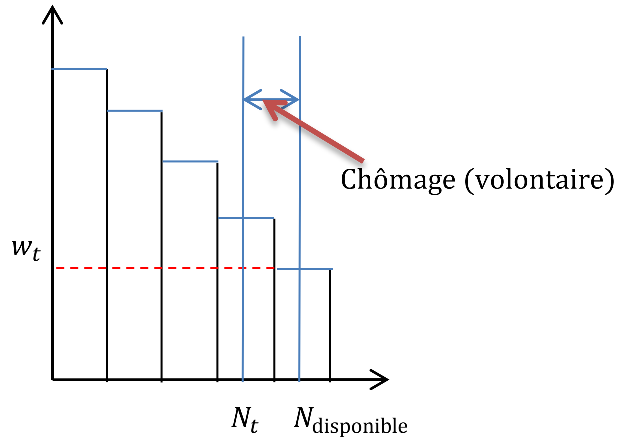
L'excès de main d'œuvre est ce qu'il se produit, lorsque les générations de capital accumulé et techniquement survivante n'offre pas assez de postes de travail pour employer toute la population disponible. Le salaire est alors déterminé de façon exogène au niveau de subsistance, inférieur à la productivité moyenne de la dernière génération survivante.




Le modèle de plein emploi a pour particularité d'avoir le nombre de poste de travail techniquement survivant excédant l'offre de main d'œuvre. L'emploi effectif sera égal à l'offre de main d'œuvre. Cela détermine le nombre de poste de travail effectivement pourvu, donc la durée de vie économique du capital et le taux de salaire égale à la productivité moyenne du travail sur la génération marginale. Durée de vie et taux de salaire détermine le taux de rendement.




Le sous-emploi Keynésien est un modèle où le plein emploi ne peut pas être atteint en raison de l'insuffisance de la demande. La demande autonome détermine le produit selon le mécanisme Keynésien de multiplicateur de dépense. Cela engendre un nombre donné de générations de capital utilisé, et donc la durée de vie économique de capital et le volume de l'emploi.




Dans ce modèle il existe au moins un régime de croissance permanent, c'est-à-dire un état régulier, et le taux de croissance est égale à $n + m$ , où $m$ est le taux de progrès technique. Sur ce sentier d'état régulier, la durée de vie du capital est constante, le taux de rendement est constant et le salaire croît au taux $m$ comme la productivité du travail. Ce régime permanent est stable, c'est-à-dire que s'il on a le respect de l'inégalité $1 > s > (n + m)\frac{K}{Y}$, alors les sentiers de croissance converge asymptotiquement vers le sentier d'équilibre.

Si on compare entre eux les sentiers d'équilibre, on montre que la durée de vie (économique) du capital diminue quand la propension à épargner $s$ s'élève, ceci parce que le transfert de main d'œuvre vers les nouvelles générations de capital s'en trouve accéléré.

Si le taux d'intérêt s'élève, le taux de rendement d'équilibre pour maintenir l'équation d'égalité offre/demande d'investissement augmente. Par conséquent, les quasi-rentes doivent être plus élevées et le nombre de générations comportant les quasi-rentes positives doit nécessairement plus élevé ; par conséquent $t$, la durée de vie du capital doit être plus élevée. Si c'est le taux de salaire qui s'élève, c'est le contraire et la durée de vie (économique) du capital diminue.

III. Le progrès technique et apprentissage

Le progrès technique peut être assimilé à un élément d'un processus général d'apprentissage ; ça provient de la tendance à ne plus considérer la prise de décision économique comme un processus dans lequel les entrepreneurs perçoivent et adoptent la meilleure ligne de conduite quelque-soit la situation. On peut penser que les entrepreneurs agissent dans l'incertitude et qu'il découvre graduellement la voie à suivre grâce à l'expérience accumulée.

L'expérience peut engendrer des économies d'échelle qui sont différents de l'indivisibilité de la théorie standard. Si on considère que les améliorations techniques sont le résultat d'une confrontation avec le problème, autrement dit, plus la production d'un bien est important, plus le développement des connaissances sera important, plus sera élevé le taux du progrès technique : la connaissance apparaît comme étant le produit de l'expérience. Les conséquences de ce genre de progrès techniques sont différentes des rendements croissants, d'abord la connaissance acquise sur le travail à grande échelle n'est pas perdue si l'échelle de production se réduit, ensuite, ce n'est pas la productivité mais son taux de croissance qui est fonction d'échelle, on mesure mieux l'expérience par la somme de toutes les productions passées que par le niveau actuel de la production : il n'y a coïncidence entre les deux que lorsque l'économie suit un sentier de croissance exponentielle à taux constant.

A. Le modèle d'ARROW

C'est un modèle à progrès technique incorporé, donc à génération de capital et le progrès technique est un progrès technique qui économise le travail et l'on mesure l'expérience par la somme des investissements passés, il s'agit des investissements bruts : on a une fonction $G^{-u}, \forall u \in ]0;1[$, exprimant la quantité de travail que réclame la dernière machine, $G$ représentant le nombre total de machine produite.

Il y a dans ce modèle une externalité positive, un investissement aujourd'hui accroît aussi la productivité de la main d'œuvre qui travaillera sur les machines ultérieures. On a une externalité inter-temporelle de l'investissement, signifiant que l'optimum est différent de l'équilibre décentralisé. L'investissement d'équilibre décentralisé est sous-optimal

$\int_{-\infty}^{\theta} I_t dt$, où $I$ étant brut

$G^{-u}, \qquad 0 < u < 1$

Avec des anticipations correctes, la production peut croître à un taux $\frac{n}{1-u}$, où $n$ étant le taux de croissance démographique. $u$ Étant plus petit que 1, l'accroissement de la productivité est proportionnellement inférieur à l'accroissement de $G$, qui engendre l'accroissement de cette productivité. En l'absence d'autre source de croissance, l'économie freinerai progressivement : l'accroissement de la population procure alors une source de croissance du produit et de l'expérience qui s'ajoute au processus d'apprentissage par l'investissement. La croissance peut être maintenue à un taux constant supérieur au taux de croissance de la population, avec un progrès technique dû à l'apprentissage.

On peut donner une relation qui exprime le produit en fonction de l'investissement

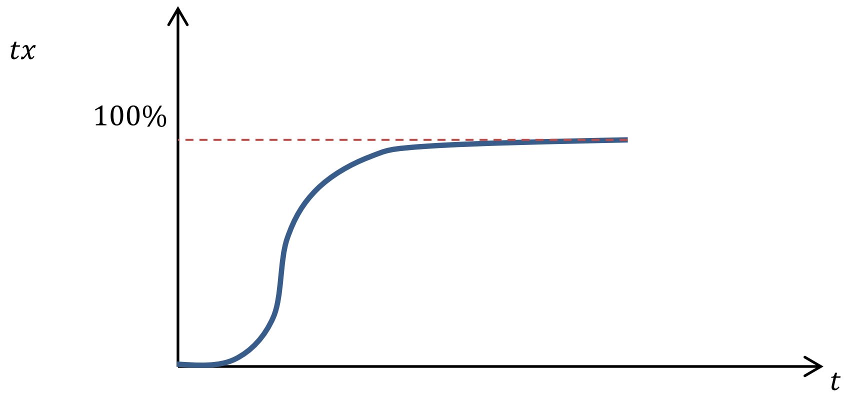
$$Y = aG\left[\left(\frac{1-(1-N)}{cG^{1-u}}\right)^{\frac{1}{1-u}}\right]$$

Arrow montre qu'on peut associer à cette relation une productivité marginale à l'optimum.

B. Le rôle de l'innovation

Il est plus pertinent d'appliquer le concept d'apprentissage par l'expérience (Learning by Doing) à une industrie où un processus industriel plutôt qu'à l'économie tout entière. La baisse des coûts est fonction de l'expérience acquise dans la fabrication d'un produit particulier au sein d'une entreprise et non pas de tous les mêmes produits de la branche, encore moins de la production industrielle en général.

Si un seul produit ou procédé est concerné, on peut s'attendre à un ralentissement des améliorations, dû au Learning by Doing. On trouve d'abord la meilleure amélioration puis la source s'épuise, c'est encore plus sensible lorsqu'il s'agit de la diffusion dans la branche d'une amélioration particulière. Les recherches pourtant sur la diffusion de nouvelles idées ont révélés un comportement logistique.




Ce genre de courbe s'applique aussi bien à la diffusion que pour l'accroissement de la productivité résultant de l'apprentissage. Le concept de Schumpeter étant, l'invention, l'innovation puis l'imitation

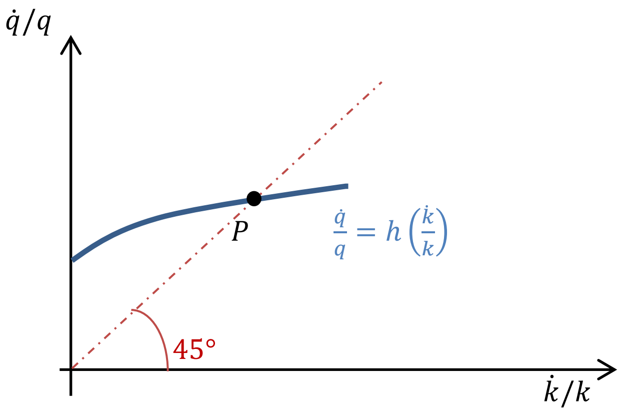
Pour Schumpeter, les améliorations sont limitées dans tous les domaines mais le système peut maintenir une croissance soutenue grâce à l'introduction exogène d'idées totalement nouvelles.

La tendance logistique se retrouve dans toutes les branches sans qu'elles n'affectent dans son ensemble, simplement car au sein d'une branche, le processus de connaissance par la pratique connait des rendements décroissants, et l'introduction de nouvelles idées et le développement de nouvelles industries permet de relancer le processus dans de nouvelles branches.

Les produits nouveaux jouent un rôle crucial dans la croissance d'où la difficulté pour construire des modèles agrégés et des mesures agrégées.

### C. Progrès technique et accumulation

Nicholas Kaldor considère que l'on ne peut pas utiliser la fonction de production traditionnelle parce que le progrès technique ne peut pas être dissocié de l'accumulation du capital. Historiquement on observe la croissance simultanée de la production par tête et du capital par tête. Kaldor pose l'hypothèse que le taux de croissance de la production par tête est une fonction croissante du taux de croissance du capital par tête




Loi de Kaldor-Verdoorn

La productivité peut augmenter en absence de toute accumulation du fait de l'ordonnée à l'origine positive, car le système d'éducation permet d'améliorer le facteur humain, soit parce que le remplacement du stock de capital permet d'introduire de nouvelles techniques de production.

Le produit par tête s'accroît avec le capital par tête ($h' > 0$) car les inventions et le progrès technique sont incorporés dans le stock de capital (physique). Il y a une sorte de loi de rendement décroissant du capital lui-même ($h'' < 0$), les innovations les plus efficace sont mise en œuvre les première. Cette économie tend vers le point $P$ car « à gauche » de $P$, les entrepreneurs sont poussé à investir, les recettes augmentant plus vite que les dépenses en capital à engager et l'inverse « à droite » de $P$.

La maximisation du profit conduit les entrepreneurs à un équilibre stable, équilibre stable qui assure l'équilibre de la croissance du produit et de la croissance du capital. Le taux de croissance d'équilibre d'une économie n'est pas fonction de propension à épargner ou à investir, ni de coefficient de capital mais de la fonction de progrès technique $\frac{\dot{q}}{q} = h\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)$ dont la position dans le plan dépend du dynamisme de l'économie (plus une économie est capable d'assimiler les innovations, plus elle est capable de créer, plus la courbe, le taux de croissance sera élevé).

Chez Kaldor, la fonction de progrès technique n'est pas linéaire ; la sensibilité de la productivité à l'investissement diminue à mesure que ce dernier augmente. L'hypothèse sous-jacente est que le progrès technique possède deux dimensions :

- Une augmentation exogène des idées
- L'exploitation de ces idées par l'apprentissage pratique

Des investissements plus importants permettent de mieux exploiter les idées disponibles mais les potentialités de ces exploitations sont limitées. Un accroissement de capital à taux constant permettra une plus grande augmentation de la productivité parce que on allouera un montant de ressources équivalent aux idées de chaque période, alors qu'un accroissement irrégulier du capital conduirait à allouer trop de ressources aux idées d'une période et pas assez aux idées d'une autre période.

Les estimations économétriques de la contribution du capital à la croissance sous estiment cette contribution dans la mesure où elle s'appuie sur la rémunération des facteurs alors qu'il existe des effets externes liés à l'investissement parce que le savoir supplémentaire introduit par l'investissement n'est pas totalement approprié par l'investisseur et donc n'apparait pas totalement dans la rémunération des facteurs qui est inférieure à la valeur du produit marginal social net que l'investissement a créé. L'investissement est alors inférieur à son niveau social optimal car l'équilibre décentralisé ne tient pas compte des externalités.

Si on fait l'hypothèse que le progrès technique est une manne, ce qui en est la cause en touche aucune récompense car tous les concurrents bénéficient immédiatement des effets du progrès technique. Si les choses se passaient comme ça, les ressources consacrées au progrès technique tendraient vers 0 puisqu'il serait inintéressant de consacrer des facteurs de développement au progrès technique.

La théorie de l'apprentissage par la pratique implique que tout investissement est, dans une certaine mesure, un investissement dans la recherche puisqu'il contribue à l'avancement des connaissances. Cela suppose que toutes les formes ont accès à l'amélioration des connaissances qui résultent de l'activité de l'une d'entre elles.

## IV. Les contributions à la croissance

### A. Les premières mesures : Cobb & Douglas

Cobb-Douglas ont été les premiers à contribuer à l'analyse de ces contributions. C'est en 1928 que Douglas, économiste, aidé par Cobb, mathématicien, ont tenté une estimation empirique de l'analyse macroéconomique dans l'industrie de transformation aux USA.

$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \rightarrow \ \alpha, 1-\alpha = $ Elasticité de la production

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{K}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}$$

Si les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale, $\alpha$ et $1-\alpha$ représentent aussi la part du revenu du capital et la part du revenu du travail dans le revenu national. Les estimations empiriques par la méthode des Moindres Carrés donnent $\alpha = 1/3$ et $1-\alpha = 2/3$, donnant la contribution des facteurs à la croissance. On a même commencé à utiliser ces valeurs comme indice de l'élasticité du revenu selon le travail ou selon le capital, mais $Y = F(K, L)$est statique, subséquemment il est difficile de l'utiliser pour expliquer les phénomènes de croissance. Les ajustements effectués et le bon sens montrent que la croissance du produit au cours du temps n'est pas due aux seuls variations du travail et du capital.

Pour tenir compte du progrès de la productivité, il faut compléter la fonction de production par un 3ème facteur appelé <u>facteur résiduel</u> ou *Trend de progrès technique*.

### B. Mise en valeur du résidu

Tinbergen, en 1942, introduit le progrès technique dans une fonction de production qui conduira au modèle de Solow-Swan

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{\beta}$$

On introduit le temps dans la fonction de production

$$A_t = A_0 e^{\lambda t}$$

$$Y_t = A_0 e^{\lambda t} \ K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \lambda + \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}$$

Par déduction on obtient $\lambda$, le trend de progrès technique ; on comprend pourquoi on parle indifféremment des 2 termes du $\lambda$ : le caractère résiduel résulte de la méthode même de l'estimation et le facteur $\lambda$ rassemble tout ce qui contribue à la croissance sans qu'on sache l'expliquer. $\lambda$ mesure tant bien l'ignorance que le progrès technique.

Solow trouve la contribution du progrès technique aux USA entre :

- 1909 et 1929 : 1%
- 1929 et 1949 : 2%

En France :

- 1925 et 1945 : 4%

Si on attribue au progrès technique une part indépendante de la production, on trouve qu'il contribue entre 50 à 75%, selon le pays et la période considéré, à la croissance.

C. La décomposition du résidu

On peut considérer d'abord que l'on n'a qu'une amélioration des facteurs quantitatifs. Par exemple : l'accroissement de la scolarisation contribue à l'accroissement de la production en améliorant la qualité de la main d'œuvre. On peut recourir au modèle à génération de capital et l'efficacité d'un stock donnée de capital dépendra de son âge moyen. Par exemple : on a un progrès technique incorporé qui accroît le produit de 1,5% par an, alors un rajeunissement d'un an de l'âge moyen du capital se traduira par un accroissement de 1,5% de la production.

On peut dire que les rendements d'échelles sont à l'origine de gains de productivité que l'on peut imputer aux différents facteurs. Empiriquement, il est difficile de les distinguer d'un progrès technique qui augmente le produit en cas de croissance régulière.

L'hypothèse de rendements d'échelle constants conduit à sous-estimer le rôle du progrès technique. On doit faire la différence entre les sources de la croissance et les causes de la croissance, ce qui revient à expliquer pourquoi dans certaines sociétés données, des quantités données de facteurs et de changements techniques ont été mise en œuvre.

# Chapitre III

*La régulation de la croissance par la répartition :*

*Analyse postkeynésienne – l'école de Cambridge*

Le modèle néo-classique de Solow apporte un certain type de solution aux problèmes de Harrod sur la divergence sur le taux de croissance garanti et le taux de croissance naturel grâce à 2 hypothèses (très fortes):

- La flexibilité des prix
- La substituabilité des facteurs de production

On peut faire 3 objections au modèle de Solow :

- On peut se demander s'il n'y a pas de limite à la flexibilité des prix.
  Exemple : Institutionnellement, on a une administration des prix du travail (SMIC). Le taux d'intérêt connait des variations limites : la trappe à liquidité.
- Le modèle néo-classique néglige l'incertitude et les erreurs de prévisions des entrepreneurs ; il fait jouer à l'investissement un rôle passif car il s'adapte toujours à l'épargne.
- Le modèle néo-classique admet que le facteur capital est endogène et malléable à volonté : elle n'a de sens que dans une économie à un seul bien ; si on admet une variété de biens capitaux distincts alors se pose le problème de la mesure du capital car pour homogénéiser ces biens hétérogènes, il faut passer par les prix.

Pour résoudre ces problèmes, les postkeynésiens vont introduire 2 catégories d'individus qui auront des propensions marginales à épargner différentes et la modification de la répartition des revenus entre ces catégories entrainera une variation de la propension moyenne à épargner de la société.

## I. Modèle de Kaldor

### A. Hypothèse du modèle

C'est un modèle de type keynésien, dans lequel :

1) Il y a 2 classes sociales, les travailleurs qui ne reçoivent que les revenus du travail et les capitalistes qui ne reçoivent que les revenus du capital
2) Chaque classe a son propre comportement d'épargne, avec $s_w$, la propension à épargner des travailleurs et $s_c$, la propension à épargner des capitalistes, d'où $0 < s_w < s_c$
3) Il y a plein emploi des ressources en capital : $\frac{S(t)}{Y(t)} = \frac{I(t)}{Y(t)}$

4) Le montant de l'investissement est une donnée exogène avec $s_w \leq \frac{I(t)}{Y(t)} \leq s_c$, impliquant qu'à l'état d'équilibre dynamique à taux régulier, le problème du choix des techniques est résolu puisqu'on doit avoir $\frac{I(t)}{Y(t)} = nv$, $I\ et\ n$ sont exogènes, $v$ est déterminé.

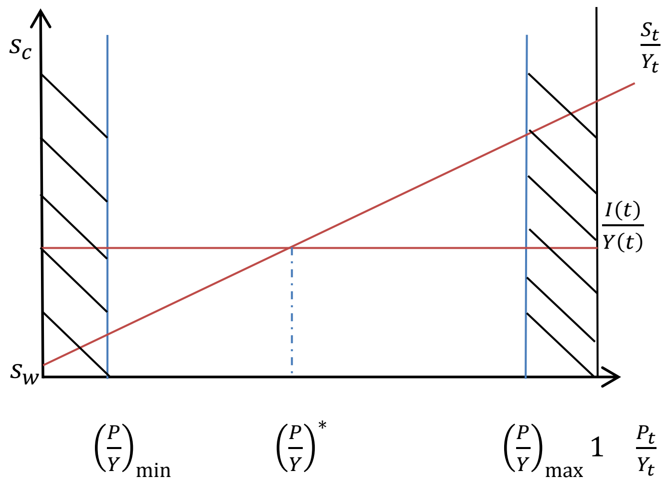
$$S = S_w + S_c, Y(t) = W(t) + P(t)$$

$\rightarrow S(t) = s_w W(t) + s_c P(t)$

$S(t) = s_w Y(t) + (s_c - s_w) P_t$

$$\frac{S(t)}{Y(t)} = s_w + (s_c - s_w)\frac{P(t)}{Y(t)}$$

Compte tenu de la contrainte imposée par $\frac{I(t)}{Y(t)}$, on peut toujours trouver une répartition convenable du convenu, c'est-à-dire une valeur de $\frac{P(t)}{Y(t)}$ qui vérifie $\frac{S(t)}{Y(t)} = \frac{P(t)}{Y(t)}$. Un équilibre dynamique à taux régulier $n$, taux de croissance de l'économie, est possible pourvu que le montant de l'investissement par unité de produit $\frac{I(t)}{Y(t)}$ vérifie la contrainte d'inégalité de l'hypothèse n°4. Dans ce cas on peut toujours trouver une répartition du revenu, une valeur de $\frac{P(t)}{Y(t)}$ qui vérifie l'équation $\frac{S(t)}{Y(t)} = s_w + (s_c - s_w)\frac{P(t)}{Y(t)}$.



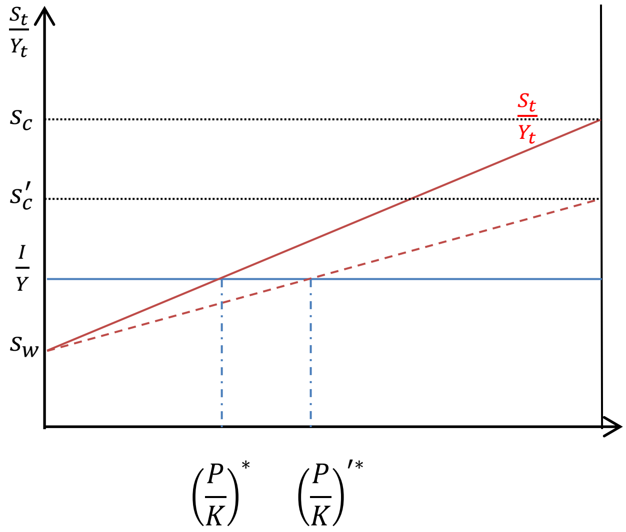

On peut penser qu'il y a des valeurs limites de $\frac{P}{Y}$, en dessous, le profit est insuffisant et l'investissement s'arrête, au-dessus de $\frac{P}{Y}$ max, il y a des mouvements sociaux, les salaires sont insuffisants

B. Les propriétés du modèle

1) La répartition des revenus entre le capital et le travail est fixée d'après un coefficient multiplicateur. Il suffit de réécrire $\frac{S(t)}{Y(t)} = s_w + (s_c - s_w)\frac{P(t)}{Y(t)}$ en isolant $\frac{P(t)}{Y(t)}$

$$\frac{P_t}{Y_t} = \frac{1}{s_c - s_w}\left(-\frac{S(t)}{Y(t)} - s_w\right)$$

2) La théorie de « la cruche de la veuve » (cruche qui ne se vide jamais) appliqué au profit ne diminue jamais ; en effet, plus les capitalistes consomment plus leur profits augmentent. Pour $\frac{S(t)}{Y(t)}$ donnée,et donc $\frac{I(t)}{Y(t)}$ en vertu de l'hypothèse 3), la propension à consommer des capitalistes à la baisse aura pour effet de diminuer le montant d'épargne par rapport à sa valeur initial, déséquilibrant la demande qui vont augmenter, ce qui va augmenter les prix, puis une diminution des salaires (réels et non nominaux) car les prix augmentent plus vite que les salaires




3) Dans le cas particuliers où la propension à épargner des travailleurs est nulle, c'est le comportement des capitalistes en matière d'épargne qui détermine la répartition des revenus entre les facteurs de production, ainsi que le taux de profit $\frac{P}{K}$

$$s_w = 0$$

$$\frac{P_t}{Y_t} = \frac{1}{s_c - s_w}\frac{I_t}{Y_t} - \frac{s_w}{s_c - s_w} \text{ devient } \frac{P_t}{Y_t} = \frac{1}{s_c}\frac{I_t}{Y_t}$$

$$\frac{P_t}{Y_t}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{1}{s_c}\frac{I_t}{K_t}$$

$$\frac{I_t}{K_t} = g = n$$

$$\frac{P_t}{K_t} = \frac{n}{s_c}$$

4) Lorsque tous les profits sont épargnés et que tous les salaires sont consommés, l'équilibre à taux régulier est un équilibre d'âge d'or, caractérisé par l'égalité entre le taux de profit et le taux de croissance

Le modèle de Kaldor débouche sur l'idée que la classe des capitalistes détermine les grandeurs économiques fondamentales, le taux de profit, la proportion du revenu globale à chaque classe et le multiplicateur du profit. Cela dépend des hypothèses du modèle ; une hypothèse, qui sera enlevé par la suite, est d'exclure les travailleurs de la détention de capital.

- Il est impossible de déterminer la répartition du revenu s'il y a plus de 2 classes sociales dans le modèle considéré.
- Si une classe choisit convenablement son comportement d'épargne, elle peut accaparer la totalité du revenu.

Supposons que l'on rajoute maintenant la classe des rentiers.

$$S_t = s_w W_t + s_c P_t + s_r R_t$$

$$\frac{S_t}{Y_t} = \frac{s_w W_t}{Y_t} + \frac{s_c P_t}{Y_t} + \frac{s_r R_t}{Y_t} = \frac{I_t}{Y_t}$$

$$\frac{W_t}{Y_t} = 1 - \frac{P_t}{Y_t} - \frac{R_t}{Y_t}$$

$$\frac{P_t}{Y_t} = \frac{1}{s_c - s_w}\frac{I_t}{Y_t} - \frac{s_r - s_w}{s_c - s_w}\frac{R_t}{Y_t} - \frac{s_w}{s_c - s_w}$$

Si les travailleurs s'arrangent pour que $s_w$ soit égale à $\frac{I}{Y}$, alors $\frac{P}{Y} = 0$ en prenant l'équation $\frac{P_t}{Y_t} = \frac{1}{s_c - s_w}\frac{I_t}{Y_t} - \frac{s_w}{s_c - s_w}$

Si $s_c = \frac{I}{Y}$ alors $\frac{W}{Y} = 0$ & $\frac{P}{Y} = 1$

## II. Le modèle de Pasinetti

Pasinetti va modifier l'hypothèse 1) de Kaldor en supposant que les travailleurs touchent d'une part, le revenu de travail et d'autre part, les revenus du capital de leur épargne placée. Pasinetti conserve l'hypothèse 2 et 3 et il modifie l'hypothèse 4 en la remplaçant par une inégalité stricte. Il ajoute une 5ème hypothèse : en équilibre dynamique à taux régulier, le taux de profit $\frac{P}{K}$ est unique et égale au taux d'intérêt $r$ car en régime de croissance équilibré de longue période, le risque et l'incertitude sont exclus.

Dans ces conditions, le profit total se réparti entre les travailleurs et les capitalistes : $P = P_c + P_w$. Etant donné que les comportements d'épargne n'ont pas été modifiés depuis Kaldor :

$$S = s_w(W + P_w) + s_c P_c = I \text{ (à l'équilibre)}$$

$$W + P_w = Y - P_c$$

$$\frac{S}{Y} = (s_c + s_w)\frac{P_c}{Y} + s_w = \frac{I}{Y}$$

→ Est-ce que les résultats du modèle seront différents de ceux de Kaldor, notamment en ce qui concerne le rôle dominant de la classe capitaliste.

$$\frac{P_c}{Y} = \frac{1}{s_c - s_w}\frac{I}{Y} - \frac{s_w}{s_c - s_w}$$

$$\frac{P_c}{K} = \frac{P_c}{Y}\frac{Y}{K} = \frac{1}{s_c - s_w}\frac{I}{K} - \frac{s_w}{s_c - s_w}\frac{Y}{K}$$

De plus :

$$\frac{P}{Y} = \frac{P_c}{Y} + \frac{P_w}{K} \rightarrow \frac{P}{K} = \frac{P_c}{K} + \frac{P_w}{K}$$

Propositions :

1) L'équilibre dynamique à taux régulier avec un taux de profit est égal au taux d'intérêt. Les profits sont distribués proportionnellement à l'épargne réalisée par chaque classe selon une proportion constante $\alpha$
2) La valeur de ce rapport $\alpha$ est déterminée uniquement par le comportement d'épargne des capitalistes ($s_c$) indépendamment du comportement d'épargne des travailleurs ($s_w$).

$$r = \frac{P}{K} = \frac{P_c}{K_c} = \frac{P_w}{K_w} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_w}{P_c} = \frac{K_w}{K_w}$$

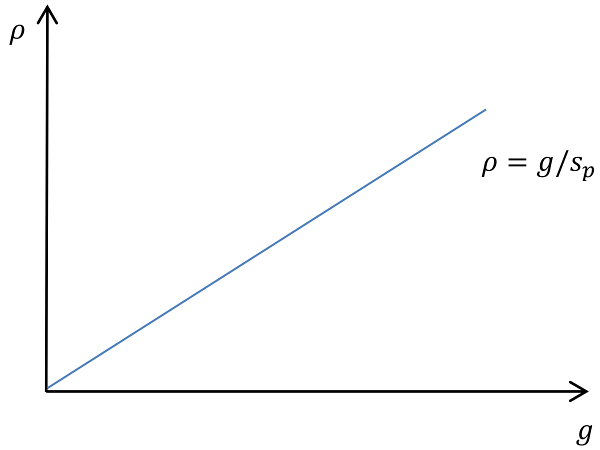
$$\frac{K_w}{K_c} = \frac{\dot{K}_w}{\dot{K}_c} = \frac{S_w}{S_c} = \text{constante}$$

$$\frac{S_w}{S_c} = \frac{P_w}{P_c}$$

## III. La relation entre profit et accumulation J. Robinson 1962

Robinson va critiquer Kaldor parce qu'il admet que la croissance potentielle permet de boucler son modèle, ce qui revient à accepter une hypothèse implicite de plein emploi, or selon elle, cette hypothèse est tout à fait irréaliste. Le capitalisme n'emploie jamais la totalité de la force de travail disponible donc le taux de croissance de cette force de travail ne peut en aucun cas déterminer un minimum ou un maximum de taux d'accumulation du capital.

Par ailleurs, la modification des techniques est permanente : c'est donc l'accumulation du capital qui est à variables centrales. De plus, le taux d'épargne n'est pas, pour Robinson, déterminé par la psychologie des ménages ; il dépend en fait du taux de profit.




Le taux de profit que l'on a en ordonné apparait comme une fonction d'accumulation

$I = S = s_w W + s_c\, P$ à l'équilibre

$W = Y - P$

$I = s_w Y + (s_c - s_w)P$

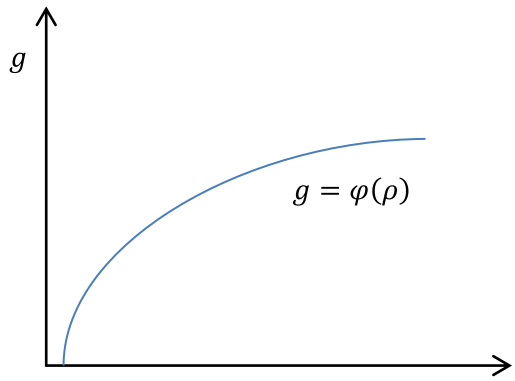
$$\frac{I}{K} = s_w \frac{Y}{K} + (s_c - s_w)\frac{P}{K}$$

$$\frac{I}{K} = g\,, \qquad g = \frac{s_w}{v} + (s_c - s_w)\rho$$

$$\frac{Y}{K} = \frac{1}{v}$$

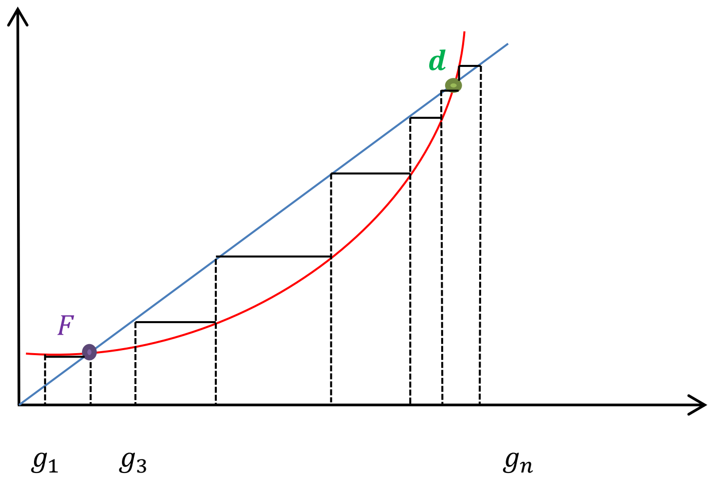
Robinson développe une causalité inverse où le rythme d'accumulation apparait comme une fonction du taux de profit, pour deux raisons :

- D'une part, le taux de profit est un indicateur de la rentabilité des investissements
- D'autre part, le profit est un moyen direct de financer l'accumulation du capital



$\rho$

Plus le taux de profit est élevé plus les perspective d'un accroissement du profit est faible : le rythme d'accumulation va se stabiliser. L'abscisse à l'origine est positif, parce qu'il faut un minimum de taux de profit pour déclencher l'accumulation.




Le taux de profit engendré par l'accumulation en $g_1$ génère une accumulation encore plus faible sur la courbe, donc une nouvelle baisse du profit, qui entraine une baisse supplémentaire de l'accumulation. C'est le taux d'accumulation est très élevé en $g_2$, il y a ralentissement de l'accumulation mais le processus s'arrête au point $d$, si le taux d'accumulation est intermédiaire, comme en $g_3$, il y a accroissement de l'accumulation, donc le taux de profit engendré par l'accumulation génère une accumulation plus élevé, etc… jusqu'au point $d$. Le point $d$ est un point d'équilibre stable, c'est-à-dire que le taux d'accumulation engendre un taux de profit exactement égal à celui qui est nécessaire pour que l'accumulation se maintienne. Le point $F$ est un point instable.

# Chapitre IV

## *La critique cambridgienne de la fonction de production néoclassique*

### I. Position du problème

C'est en 1953, que Joan Robinson pose la question de la mesure du capital dans la fonction de production néoclassique. Le travail est mesuré en temps de travail mais quelle est l'unité de mesure du capital, par rapport au choix des techniques de production ?

Elle compare trois pays $\alpha, \beta, \gamma$

Dans le pays $\alpha$, avec un bulldozer et quelques hommes, on construit une route, dans le pays $\beta$, avec un char à bœufs et quelques centaines d'hommes, on construit une route et dans le pays $\gamma$, avec des pelles en bois et plusieurs milliers d'hommes, on construit une route.

D'une façon ou une autre, cela vient de ce que le capital est plus abondant en $\alpha$ qu'en $\beta$ et en $\beta$ qu'en $\gamma$. Si on ne connait pas l'unité de mesure du capital, on ne peut pas résoudre, le problème du choix des techniques que la fonction de production permet de poser.

#### A. Le choix des techniques chez les néoclassiques

$$Q = F(K, L) - wL - \rho K$$

Chez les néoclassiques, on cherche à maximiser le produit net.

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = F'_L(K, L) - w = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = F'_K(K, L) - \rho = 0$$

$$\frac{Q}{L} = q = f(k), \qquad k = \frac{K}{L}, \qquad Q = Lf'(k)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = f(k) + L * \frac{df(k)}{dk} * \frac{dk}{dL} = f(k) + Lf'(k)\left(-\frac{K}{L^2}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = f(k) - kf'(k)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = L\frac{df(k)}{dk} * \frac{dk}{dK} = Lf'(k) * \frac{I}{L} = f'(k)$$

En appliquant le théorème d'Euler…

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial L} * L + \frac{\partial Q}{\partial K} * K = Lf(k) - Lkf'(k) + Kf'(k)$$

$Q = Lf(k), \qquad Q = F'_L * L + F'_K * K, \qquad Q = wL + \rho K$

$q = f(k) = w + \rho k$

Propositions :

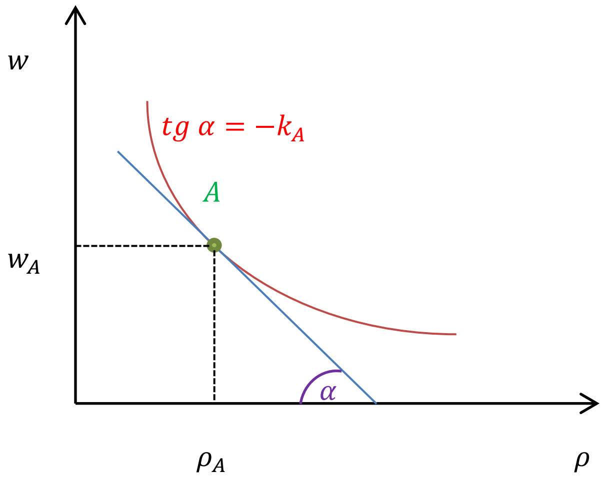
1) La frontière enveloppe des prix des facteurs productifs est une courbe convexe décroissante : il existe une liaison inverse entre le taux de salaire et le taux de profit et la répartition fonctionnel des revenus (entre les facteurs de productions) est connu dès que l'on connait l'une des 3 variables $w, \rho$ ou $k$

$w = f(k) - kf'(k), \qquad \rho = f'(k)$

$$\frac{dw}{dk} = f'(k) - f'(k) - kf''(k) = -kf''(k)$$

$$\frac{df}{dk} = f''(k)$$

$$\frac{dw}{df} = -k < 0, \qquad w = -\rho k + \text{constante}$$




On remarquera que l'expression $k\frac{\rho}{w}$ est l'expression de l'élasticité du taux de salaire par rapport au taux de profit.

$$e(w/\rho) = -\frac{dw/w}{d\rho/\rho} = -\frac{dw}{d\rho} * \frac{\rho}{w} = k\frac{\rho}{w}$$

2) Le choix optimale de technique dépend du taux de profit selon une liaison inverse, le degré de mécanisation est d'autant plus élevé que le taux de profit est faible

$$v = \frac{k}{f(k)}, \qquad v' = \frac{f(k) - kf'(k)}{\left(f(k)\right)^2} > 0$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{dv}{dk} * \frac{dk}{d\rho} = \frac{f(k) - kf'(k)}{f(k)^2 f''(k)} < 0$$

3) A l'état d'équilibre dynamique à taux régulier, avec un taux de croissance de la population inférieur au taux de profit ($n < \rho$), une baisse du taux de profit s'accompagne d'une hausse du niveau de consommation par tête.

$$c = f\big(k(t)\big) - nk(t)$$

$$c' = f'(k) - n$$

$$\frac{dc}{d\rho} = \frac{dc}{d\rho} * \frac{dk}{d\rho} = \frac{f'(k) - n}{f''(k)} < 0$$

Toutes ces propositions néoclassiques sont établies dans un cas particulier : les économies à bien unique et à capital malléable. Elles sont néanmoins érigées en règle général, applicable en toute circonstance. Que se passe-t-il si on lève l'hypothèse du bien unique ?

## B. La mesure du capital

Pour mesurer le capital, on doit connaître au préalable le taux de profit et la productivité marginale du capital n'est plus alors égale au taux de profit.

Le capital est une collection hétérogène de bien qui n'ont en commun que d'être mesurable en unité monétaire. Donc on peut l'agréger par l'intermédiaire de prix, cela suppose de connaître le taux d'intérêt : en effet la valeur du capital est définie comme la valeur actuelle de la chronique des profits futurs, valeur actualisée grâce au taux d'intérêt. On peut représenter cette valeur de la façon suivante :

$$V = Q\int_0^T e^{-\rho t}\, dt = Q\frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho}$$

avec $Q$ : le produit net que le capital permet de dégager chaque année

En valeur discrète :

$$V = Q\sum_{t=1}^{T} (1+\rho)^{-t} = Q\frac{1 - (1+\rho)^{-T}}{\rho}$$

Le coût du capital, différent de sa valeur, est le coût du stock de bien qui le constitue, c'est-à-dire, la quantité de produit immobilisé sous forme de salaire pendant toute la période de gestation.

$w\displaystyle\int_0^\theta t dt = w\frac{\theta^2}{2}$, $\quad \theta =$ temps de gestation du capital

A ça, il faut ajouter les intérêts cumulés sur les salaires :

$$w\int_0^\theta e^{\rho t}dt - w\theta = \frac{w}{\rho}\left(e^{\rho\theta} - 1\right) = \frac{1}{2}\rho w\theta^2 + \frac{1}{6}\rho^2 w\theta^3$$

Si on ajoute le coût avec les intérêts :

$$K = w\frac{\theta^2}{2}\left(1 + \rho + \frac{\rho^2\theta}{3}\right)$$

A l'équilibre, le coût et la valeur sont égaux, subséquemment, $\rho$ sera déterminé et va permettre d'égaliser le coût et la valeur du capital.

En cas d'hétérogénéité du capital, la mesure du capital n'est plus une mesure physique : elle met en jeu des grandeurs économiques comme le taux d'intérêt. Il devient impossible de considérer comme purement technologique une relation qui intègre le capital, ce que faisait jusqu'à présent les néoclassiques.

## II. Le retour des techniques

On va construire un modèle à 2 biens :

- 1ère Hypothèse : Il existe un bien de consommation final unique dont la production nécessite l'emploi de main d'œuvre et de capital.
- 2ème Hypothèse : La production du bien de consommation final utilise la main d'œuvre et le bien capital ; de même pour la production de capital, les techniques sont définies par la proportion entre la main d'œuvre et le bien capital, à chaque technique correspond un bien capital différent.
- 3ème Hypothèse : Le processus productif supposé *viable*[5], est un système à rendements constants. La main d'œuvre est rémunérée à la fin de la période de production dont la durée est d'un an. La production obtenue au cours d'une période est destinée à la production ou à la consommation de la période suivante.
- 4ème Hypothèse : Seuls les états dynamiques sont observables : A chaque état d'équilibre correspond une propension à épargner $s$ et un taux de croissance régulier $g$

### A. La frontière des prix des facteurs

On va représenter un modèle avec $w$, le taux de salaire, $\rho$ le taux de profit, le coefficient $a_{ij}$, quantité de bien j suffisant à produire une unité de bien $i$, et $l_i$, la quantité de travail nécessaire à produire une quantité du bien $i$.

Supposons $\left(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1j}p_j + a_{1n}p_n\right)(1+\rho) + l_1 w = p_1$

[5] Un système viable signifie que c'est un système qui produit au moins ce qu'il consomme

$1 = l_1 w + a_{12} p\Pi$ (1)

$p = l_2 w + a_{22} p\Pi$ (2)

Tel que $\Pi = 1 + \rho$

Le bien (1) sera le bien de consommation final et le bien (2) sera le bien capital

$$\begin{pmatrix} 1 = l_1 w + a_{12} p(\rho + d) \\ p = l_2 w + a_{22} p(\rho + d) \end{pmatrix}$$

On a un système de deux équations à 3 variables $\Pi, w, p$. On peut représenter des solutions comme étant les couples $(w, \Pi)$ou $(w, \rho)$ réalisables.

$$(1) \Rightarrow p = \frac{1 - l_1 w}{a_{12}\Pi}$$

$$\frac{1 - l_1 w}{a_{12}\Pi} = \rho_2 w + a_{12} p\Pi$$

$$\Rightarrow w = \frac{1 - a_{22}\Pi}{l_1 + (a_{12} l_2 - a_{22} l_1)\Pi}$$

$$w'' = \frac{a_{12} l_2 2D}{(l_1 + D\Pi)^3}$$

$$l_1 + D\Pi > 0$$

$$\Rightarrow l_1 + D\Pi l_1 + a_{12} l_2 \Pi - a_{22} l_1 \Pi = \mathrm{l}_1(1 - a_{22}\Pi) + a_{12} l_2 \Pi$$

Donc :

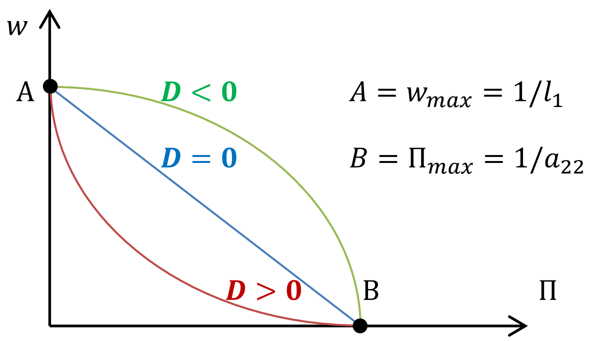
$$p = l_2 w + a_{22} p\Pi \rightarrow 1 = \frac{l_2}{p} w + a_{22}\Pi \Rightarrow a_{22}\Pi < 1$$

$$\Rightarrow 1 - a_{22}\Pi > 0 \Rightarrow l_1 + D\Pi > 0$$

$w'' > 0$ si D>0 $Convexe$

$w'' < 0$ si $D < 0$ $Concave$

$w'' = 0$ si $D = 0$ $Linéaire$



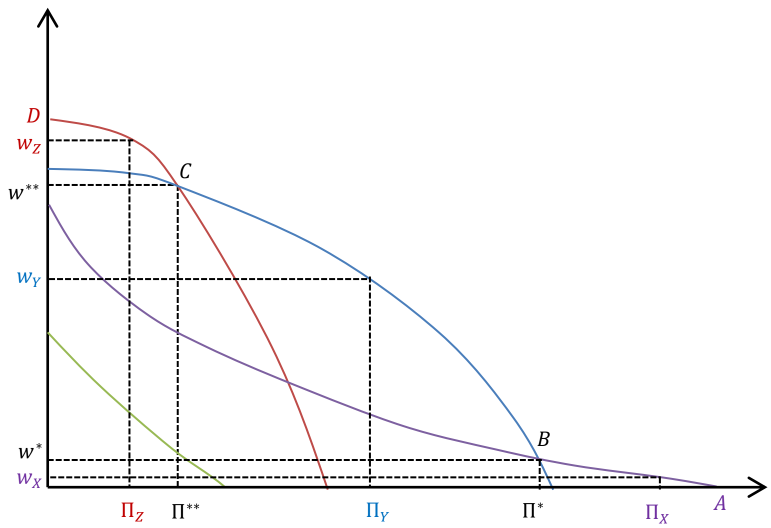
Le secteur 1 (des biens de production) est plus mécanisé que le secteur 2 (des biens de production)

La relation $w = f(\Pi)$ exprime les couples maximum de rémunération praticable. On l'appelle frontière des prix des facteurs, elle établit pour chaque technique de production une relation entre le profit et le salaire, relation décroissante mais généralement non linéaire. La technique de production est caractérisée aussi bien par les coefficients de production que par la frontière des prix des facteurs.

B. Une économie avec plusieurs techniques

L'économie a accès à plusieurs techniques : On dira qu'une technique $\alpha$ domine une technique $\beta$ si elle permet toujours d'atteindre des couples $(w, \Pi)$ supérieures. Il est possible qu'une technique domine une autre technique de $\Pi$ pour certaines valeurs et qu'elles soient dominés par d'autres valeurs. Si on choisit, parmi l'ensemble des techniques, les techniques dominantes (quand elles le sont), on obtient la frontière des prix des facteurs pour l'économie, qui est l'enveloppe des prix des facteurs pour l'économie.

$w$ est déterminé de manière exogène



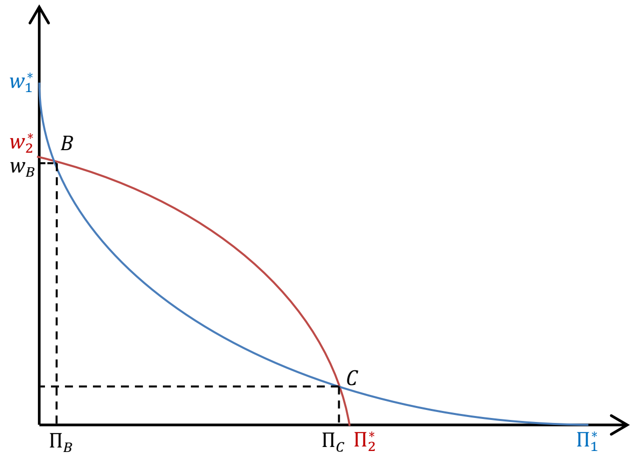

Il y a ici 4 techniques

On élimine la technique strictement dominée (courbe verte)

Pour chaque technique, on choisira à maximiser $\Pi$ en fonction de $w$, ou inversement, qui se traduira par le choix de la courbe la plus « extérieure ». Par exemple pour $w_Y$, ce sera la courbe bleue qui sera choisi.

Lorsque les courbes sont sécantes, le point d'intersection signifie qu'il y a indifférence de choix de technique. Pour $C$, il y a indifférence entre choisir la rouge ou la bleue et pour $B$, il y a indifférence entre choisir la bleue ou la violette.

Dans ce cas la frontière respecte toutes les assertions (affirmations), mais ce n'est pas toujours le cas :




La technique bleue domine dans un premier temps jusqu'à B puis domine de nouveau à partir de C, c'est ce que l'on appelle du *reswitching*

La même technique est utilisée dans les économies où le salaire est très bas et celle où le salaire est très élevé, donc la baisse du taux de salaire ne conduit pas nécessaire à l'adoption d'une technique utilisant davantage de travail et la hausse du salaire n'entraine pas nécessairement le choix d'une technique plus économe en travail. A l'origine de ce phénomène, il y a le rôle du prix relatif du capital : en effet, le capital a rémunéré une valeur et la même technique physique apparaîtra plus ou moins capitalistique selon le système des prix, or le système des prix dépend lui-même de la technologie, du salaire et du profit.

## III. L'effet Wicksell

Wicksell part du fait que tout accroissement de la quantité du capital va entrainer une augmentation du taux de salaire car le capital nouveau fait concurrence à l'ancien pour l'emploi de la même quantité de travail et parce que pour produire ce capital nouveau, il faut détourner du travail de la production de biens de consommation, composant le produit final vers celle des biens de production.

La productivité marginale dans le secteur des biens de consommation augmente par conséquent, le taux de travail augmente. Pour Wicksell, il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse que la population reste stationnaire puisque la productivité marginale du capital est la dérivé partielle de la fonction de production ce qui suppose au moment du calcul que la quantité de travail est constante.

Il s'en suit qu'une partie seulement de l'accroissement du capital est productive du côté du capital si bien que pour Wicksell, la productivité marginale du capital est toujours inférieur au taux de profit.

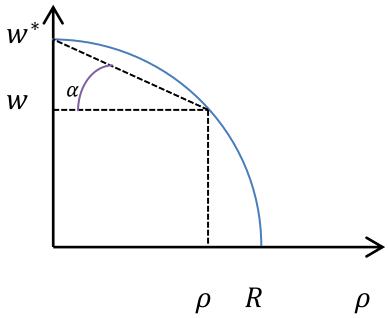
A. La frontière des prix des facteurs pour une technique donnée

$Y = \Pi + w$

$Y = pK + wL$

$y = pk + w$

$w^* = y$




$$k = \frac{y - w}{\rho} = \frac{w^* - w}{\rho} = \frac{ww^*}{\rho} = tg\ \alpha$$

On fait l'hypothèse que le capital est produit en quantité juste suffisante pour son remplacement. Le taux de profit maximum est égale à $R$, $K$ représente une valeur capital et non une quantité physique, $k$ est une valeur de capital par tête, $ww^*$ représente la fraction du produit net par tête que perçoivent les capitalistes.

Lorsque le taux de profit s'élève de 0 à $R$, la valeur du stock physique des biens capitaux engagés dans la production se modifie. Il s'agit ici de la frontière des prix des facteurs pour une technique donc avec un stock physique de capital constant.

On appelle ce phénomène, l'effet Wicksell/prix : c'est bien purement un effet prix puisque seul le prix du capital varie, sa nature et sa constitution physique reste inchangées. Dans notre cas de frontière des prix des facteurs concave, la valeur des prix des facteurs augmente avec le taux de profit.

On peut établir une relation générale entre le prix du bien capital et le taux de profit :

$1 = l_1 w + a_{12} p \Pi$ (1)

$p = l_2 w + a_{22} p \Pi$ (2)

$$(1) \Rightarrow w = \frac{1 - a_{12} p\ \Pi}{l_1}$$

$$p = \frac{l_2}{l_1 + (a_{12} l_2 - a_{22} l_1)\Pi}$$

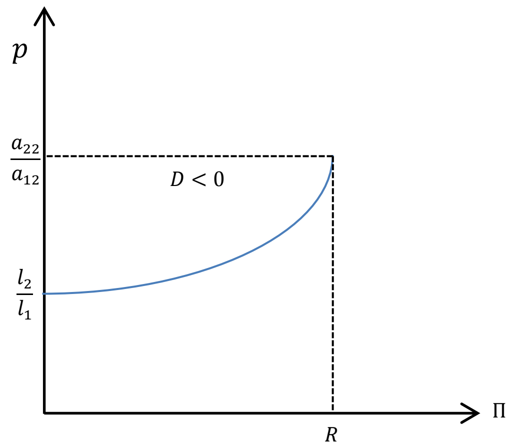
$p = \varphi(\Pi)$

$a_{12} l_2 - a_{22} l_1 = D$

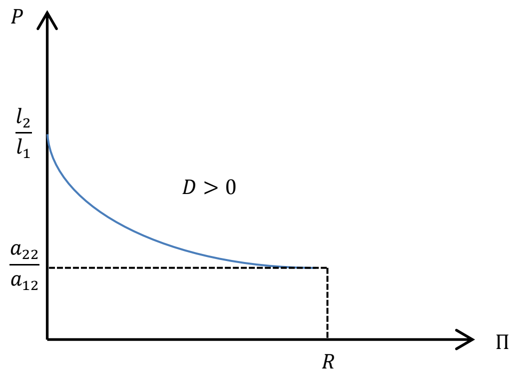
$$\begin{cases} \varphi' < 0 \text{ si } D > 0, & \dfrac{a_{12}}{l_1} > \dfrac{a_{22}}{l_2} \\ \varphi' = 0 \text{ si } D = 0, & \dfrac{a_{12}}{l_1} = \dfrac{a_{22}}{l_2} \\ \varphi' > 0 \ \forall D \neq 0\,, \ \ \varphi'' = 0 \text{ si } D = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi'(\Pi) \ = \ -\dfrac{D l_2}{(l_1 + D\Pi)^2}, \qquad (l_1 + D\Pi) > 0 \\ \varphi'(\Pi) = \frac{2D^2 l_2}{(l_1 + D\Pi)^3} \end{array}}$$

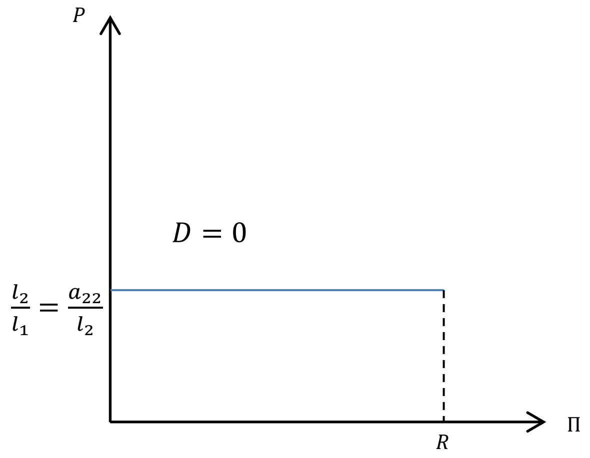
3 cas s'imposent donc :




Effet Wicksell négatif




Effet Wicksell positif




Il y a un cas où la répartition du revenu est … et on remarquera que dans ce cas $\frac{a_{12}}{l_1} = \frac{a_{22}}{l_2}$, ce qui signifie que les 2 marchandises sont produites dans les mêmes conditions de production, or, en théorie de la production, le seul critère pour dire que 2 marchandises sont différentes l'une de l'autre est la différence de leur condition de production.

$1 = l_1(w + \lambda p\Pi)$

$p = l_2(w + \lambda p\Pi)$

Avec $\lambda = \frac{a_{12}}{l_1} = \frac{a_{22}}{l_2}$

Cela revient à examiner un système qui produit une seule marchandise, à l'aide d'elle-même et de travail. On retrouve les modèles à un seul bien de la fonction de production macroéconomique néoclassique.

A part cette exception, il apparait impossible de déduire de la relation $y = \rho k + w$ que $\rho$ est égale à la productivité marginale du capital, en effet $\frac{\partial y}{\partial k} = \rho$ est une écriture éronné parce que $\rho k$ et $w$ ne sont pas des variables indépendantes.

On peut préciser cela :

## B. Les différents effets Wicksell

### 1. L'effet Wicksell/Prix

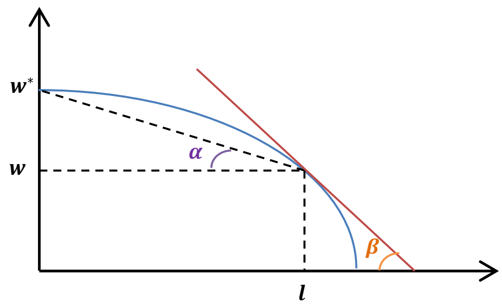
- Définition

L'effet Wicksell prix est la modification de la valeur du capital par tête à la suite d'une variation du taux de salaire et du taux de profit, sans qu'il y ait de changement technique, ce qui veut dire que $y$ reste inchangé :

$$dy = dw + kd\rho + \rho dk = 0$$

$$\frac{dk}{d\rho} = -\frac{1}{\rho}\left(k + \frac{dw}{d\rho}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{d\rho} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dw}{d_\rho} = -k, & f\rho f^{6} = \text{droite} \\ \dfrac{dk}{d\rho} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{dw}{d\rho} > -k, & f\rho f = \text{convexe} \\ \dfrac{dk}{d\rho} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{dw}{d\rho} < -k, & f\rho f = \text{concave} \end{cases}$$




$$tg\ \alpha = -k$$

$$\frac{dw}{dp} = tg\ \beta < 0$$

$$tg\ \beta < tg\ \alpha < 0$$

$$\frac{dw}{dl} < -k$$

[6] $fpf$ : Frontière des prix des facteurs

On retrouve la conclusion suivant laquelle l'affirmation néoclassique d'une relation inverse entre le taux de profit et le degré de mécanisation n'est vérifiée que dans des cas particuliers donc ne constitue pas une loi.

2. L'effet Wicksell réel

On va procéder à un changement de technique. Par conséquent, il y a à la fois modification de la valeur du capital par tête $k$, variation du taux de salaire et du taux de profit et $dy$ (produit par tête) $\neq 0$. On va comparer sur la frontière technologique 2 états d'équilibre : l'un sur le point de commutation, où l'on change de technique, et l'autre dans son voisinage, non loin du changement.

$$dy = dw + \rho dk + kd\rho$$

$$\frac{dy}{dk} = \rho + \frac{dw}{dk} + k\frac{d\rho}{dk}$$

$P_w k \neq \rho$ (en règle général) sauf si $\frac{dw}{dk} = -k\frac{d\rho}{dk}$

$\Rightarrow \frac{dw}{d\rho} = -k, \qquad fpf$ linéaire ($fpf$ = frontière des prix des facteurs)

$$\frac{dk}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{dy}{d\rho} - \left(k + \frac{dw}{d\rho}\right)\right)$$

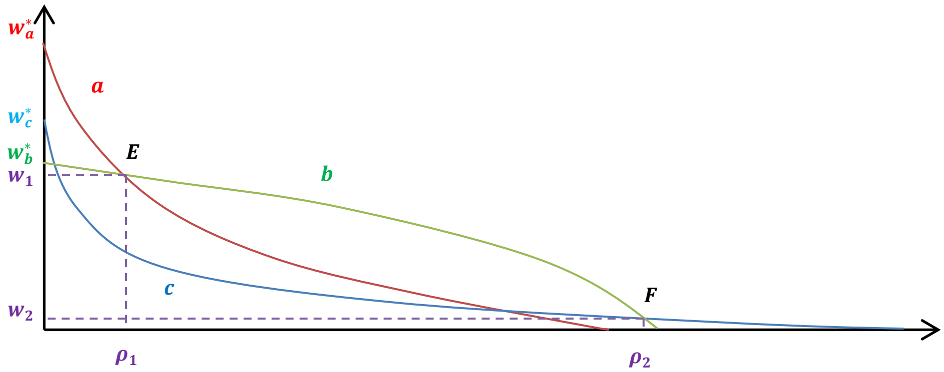
$$dk = \frac{dy}{\rho} - \frac{dw}{\rho} - \frac{kd\rho}{\rho}$$

$\frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}$ Effet revenu ; $-\frac{1}{\rho}\left(k + \frac{dw}{d\rho}\right)$ Effet prix

La différence de la quantité physique de moyens de production se traduit par une différence de la productivité du travail, mesuré par $dy$, et on capitalise cette productivité physique en divisant par le taux de profit.

On va maintenant mesurer la conséquence de la modification de la répartition sur le prix du capital. La fraction $dw/\rho$ mesure la différence du prix du capital due à la modification du salaire. On actualise le flux futur en divisant par $\rho$, si le salaire augmente, c'est moins de recette pour le capital, $kd\rho/\rho$ mesure la différence du prix du capital due à la variation du taux de profit.

On montre que même en l'absence de retour des techniques, des effets contraires aux affirmations néoclassiques sont observés.

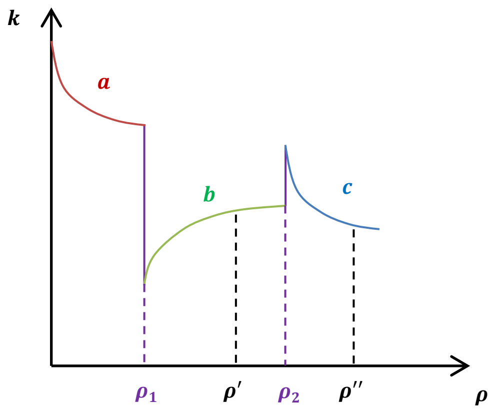



$$k = \frac{w^* - w}{\rho} \Rightarrow k_a > k_c > k_b$$

Au point E, si le taux de profit augmente, on va passer de la technique $a$ à $b$. En réponse à une augmentation du taux de profit, on passe à une technique moins capitalistique et conforme à la norme : c'est un effet Wicksell réel positif.

Au point F, en cas d'accroissement du taux de profit, on passe de la technique $b$ à $c$. On passe à une technique plus capitalistique en réponse à une hausse du taux de profit, ce qui est contraire aux affirmations néoclassiques : c'est un effet Wicksell réel négatif.

Ce phénomène s'explique par le fait que pour certains niveaux du taux de profit, l'avantage d'une productivité supérieure est plus que contrebalancé par le handicap d'un capital supérieur à rémunérer. Pour d'autres niveaux du taux de profit, c'est le contraire. La présence d'effets Wicksell annule la validité des paraboles néoclassiques, indépendamment de toute résurgence de technique. La frontière technologique $abc$ ne comporte aucun retour des techniques, mais il n'y a ni convexité de la frontière enveloppe des prix des facteurs ni relation inverse entre le taux de profit et le degré de mécanisation.




Jusqu'à $\rho_1$, la thèse des néoclassiques est vérifiée. Quand on passe de $\rho'$à $\rho''$, autour de $\rho_2$, on change de technique pour une technique plus mécanisée, ce qui est contraire au néoclassique. La variation du capital en fonction des paramètres de la répartition est double : pour une technique donnée la valeur du capital varie lorsque les paramètres de la répartition changent, et d'une technique à l'autre, la valeur du capital varie pour une valeur inchangée du paramètre de répartition. Il en résulte que la même technique de production (même quantité physique de capital) est compatible avec des quantités différentes du capital du point de vue économique (capital mesurée en valeur) et la même quantité de capital (toujours en valeur) est compatible avec des techniques différentes.

La productivité marginale est donc indéterminée. De même la productivité marginale du travail est indéterminée puisqu'elle est calculée en gardant constant le capital mais à une quantité donnée de capital peut correspondre différents stocks physiques de moyenne de production.

La conception du taux de profit et du salaire comme indicateurs de la rareté relative des facteurs est fausse. La théorie de la productivité marginale en tant que théorie de demande des facteurs doit donc être rejetée. Par suite est également erronée la théorie qui déterminée en termes d'offre et de demande la répartition du revenu comme prix d'équipement sur les marchés des facteurs de production.

*Fin du cours de Macroéconomie dynamique*

*Signé par :*

(^)(^)

(=^-^=)

(‘’) (‘’)

POOKIPOOKI

*votre fidèle serviteur …*

2010
2011

FACULTÉ D'ÉCONOMIE
université montpellier 1

Université Montpellier I

# Macroéconomie dynamique

H34VEN
Cours pour Licence 3, Semestre 5 Année 2011