Jeux dynamiques en information complète

Fabien Prieur

Premier semestre L3, 6 Novembre 2013

Propos liminaires

Dans la plupart des situations économiques, les agents sont engagés dans un processus de décision *dynamique*.

Exemples :

- Négociation entre un syndicat et sa direction pour une revalorisation salariale.
- Concurrence sur une marché ayant une structure d'oligopole.

Dans les jeux dynamiques : l'interaction se déroule sur plusieurs périodes, de manière séquentielle ou répétée.

Qu'est-ce qu'une stratégie dans un jeu dynamique ? Quand peut-on dire qu'une stratégie est crédible ?

Crédibilité d'une stratégie

Exemple. Jeu de la grenade à deux étapes.

Le joueur 1 choisit **d'abord** de donner 1000 euros au joueur 2 ou de ne rien donner.

Le joueur 2 décide **ensuite** de dégoupiller ou non une grenade, la première option les tuerait tous les deux.

Supposez que le joueur 2 menace le joueur 1 de faire exploser la grenade s'il ne lui donne pas 1000 euros...

Que doit faire le joueur 1 ?

Contenu

Représentation sous forme extensive d'un jeu dynamique.

Rôle de l'information, parfaite ou imparfaite : selon que les joueurs observent ce qui s'est passé dans le jeu jusqu'à leur tour.

Crédibilité : l'équilibre de Nash est insuffisant, ne permet pas d'écarter les stratégies basées sur des menaces non crédibles.

Analyse basée sur la rationalité séquentielle des joueurs :

- **Principe d'induction rétroactive** et,
- **Equilibre de Nash parfait en sous jeux** (Selten, 1965).

Etude des situations de jeux répétés.

Plan

Représentation du jeu

Pour la représentation d'un jeu, il faut connaître :

- Les joueurs,
- Les règles (les stratégies),
- Les résultats possibles et,
- Les fonctions de paiement.

Les résultats du jeu sont toujours fonction des stratégies adoptées par tous les joueurs.

A chaque étape, quel est le joueur qui agit ? Que sait-il ? Quelles sont les actions possibles ?

La représentation du jeu : **arbre du jeu**.

Dilemme du prisonnier à deux étapes

Les deux suspects sont arrêtés et interrogés **l'un après l'autre**.

Le premier prisonnier décide de dénoncer ou non (première période).

Puis le second prisonnier, ayant observé la décision de l'autre, est confronté à la même décision.

Mêmes paiements mais la différence principale : la prise de décision intervient de manière séquentielle non simultanée.

Représentation sous forme d'arbre

Le jeu débute au niveau du noeud initial : spécifie quel est le premier joueur à agir (J1).

De ce noeud partent deux branches : nombre d'actions possibles pour J1.

Ces branches atteignent deux noeuds de décision intermédiaires, au niveau desquels J2 doit choisir son action.

Dans ce jeu, J2 sait en quel noeud il se situe (gauche ou droite).

$\Rightarrow$ Jeu en information parfaite : il a pu observer le choix de J1

Représentation sous forme d'arbre - 2

De chacun de ces noeuds partent encore deux branches, qui décrivent les actions possibles de J2.

Après le mouvement de J2, le jeu se termine.

La fin est matérialisée par les noeuds terminaux.

Autant de noeuds terminaux que de résultats possibles (4).

Y figurent les paiements associés au résultat correspondant.

Jeu de la pièce à deux étapes

J1 commence par choisir le côté de la pièce qu'il veut présenter.

Puis J 2 fait la même chose en ayant la possibilité de voir ce qu'a fait J1.

Représentation ?

Information parfaite : tous les joueurs connaissent les actions passées, jouées par leurs adversaires lorsque leur tour arrive ; tous savent où ils se trouvent dans l'arbre.

Rq. situation différente où un joueur ignore sa position dans l'arbre au moment de jouer.

Information imparfaite et ensemble d'information

Supposons que lorsque c'est au tour de J2 de jouer, il ne peut observer le choix du joueur 1 (J1 cache la pièce avec sa main).

Représentation similaire à un détail près : *ellipse* incluant les deux noeuds de décision du J2.

$\Rightarrow$ Ensemble d'information de J2 qui ignore en lequel des noeuds exactement il se situe.

J2 dispose du **même ensemble d'actions possibles** en chacun des noeuds de son ensemble d'information.

Ensemble d'information - 2

Un ensemble d'information (EI), pour le joueur *i* est un **sous ensemble des noeuds de décision** de ce joueur.

La liste de tous les EI d'un joueur caractérise tous les évènements distinguables suite auxquels il va être amené à prendre une décision.

Dans les jeux à information parfaite : Les EI sont des *singletons* i.e. contiennent un **unique** noeud de décision.

Dans les jeux à information imparfaite : les EI de certains joueurs contiennent **plusieurs** noeuds de décision.

Ensemble d'information - 3

Definition

Un jeu est à information parfaite si tous les ensembles d'information contiennent un unique noeud de décision. Sinon, le jeu est à information imparfaite.

Rq. On suppose que les joueurs ne peuvent oublier ce qu'ils ont su à un moment dans le jeu : mémoire parfaite.

Prise en compte de l'aléa

Jusqu'ici, situations où le résultat du jeu est entièrement et uniquement déterminé par les actions entreprises par les joueurs.

Possible que l'issue du jeu soit soumise à un aléa CAD à la survenue d'un évènement extérieur.

$\Rightarrow$ Le résultat du jeu est donc aléatoire.

Introduction d'un nouveau joueur dans le jeu : **la Nature**.

"Actions" sont décrites par une loterie avec probabilités fixées.

Jeu de signal - 1

Deux joueurs en interaction pour une transaction.

Le vendeur d'un bien propose un prix unitaire $p \in \{p_1, p_2\}$.

Puis le consommateur, ayant observé le prix, décide de la quantité à acheter $q \in \{q_1, q_2\}$.

Tous les joueurs ne connaissent pas les fonctions de paiement $(u(.), \pi(.))$: incertitude sur la qualité du produit.

Description : Etats de la Nature $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, et distribution de probabilité $(\mu, 1-\mu)$.

Jeu de signal - 2

Le vendeur connaît toujours la qualité – le consommateur ne connaît jamais la qualité mais dispose de l'information ci-dessus.

Jeu à information incomplète transformé en jeu en information imparfaite :

Représentation de cette incertitude par un troisième joueur, la Nature, qu'on fait généralement jouer en premier.

Rq. La structure du jeu est toujours de connaissance commune.

Définition d'un jeu sous forme extensive - 1

1/ Ensemble fini de joueurs $N = \{1, ..., i, ..., n\}$, ensemble fini de noeuds X, ensemble fini d'actions $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

2/ Fonction $f : X \to X \cup \phi$ spécifiant le prédécesseur de chaque noeud x ;
$f(x)$ est non vide pour tous les $x \in X$ sauf un, le noeud initial x_0. Les successeurs immédiats de x sont les $s(x) = f^{-1}(x)$. Ces ensembles sont supposés disjoints.

L'ensemble des noeuds terminaux est noté $T = \{x \in X / s(x) = \phi\}$. Tous les autres noeuds, dans $X \setminus T$ sont des noeuds de décision.

Définition d'un jeu sous forme extensive - suite

3/ Fonction $\alpha : X \setminus \{x_0\} \rightarrow A$ donnant l'action qui conduit à n'importe quel noeud à partir de son prédécesseur $f(.)$
Et satisfaisant la propriété suivante : si $x', x'' \in s(x)$ et $x' \neq x''$ alors $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$.

L'ensemble des choix disponibles au noeud x est
$c(x) = \{a \in A/a = \alpha(x') \; pour \; x' \in s(x)\}$.

4/ Collection d'EI Ψ et fonction $h : X \rightarrow \Psi$ qui associe à chaque noeud x un EI $h(x) \in \Psi$.

Tous les noeuds appartenant au même EI ont les mêmes choix disponibles : $c(x) = c(x')$ si $h(x) = h(x')$.
Les choix disponibles en h : $C(h) = \{a \in A/a \in c(x) \; pour \; x \in h\}$.

Définition d'un jeu sous forme extensive - fin

5/ Fonction $\epsilon : \Psi \to \{0, 1, ..., i, ..., n\}$ associant à chaque EI le joueur (ou la Nature, joueur 0) qui doit agir aux noeuds de décision qui le composent.

$\Psi_i = \{h \in \Psi / i = \epsilon(h)\}$: collection des EI du joueur i.

6/ Fonction $\rho : \Psi_0 \times A \to [0, 1]$ donnant les probabilités associées aux actions de la nature et satisfaisant : $\rho(h, a) = 0$ si $a \notin C(h)$ et $\sum_{a \in C(h)} \rho(h, a) = 1$ pour tout $h \in \Psi_0$.

7/ Collection de fonctions d'utilité VNM $u = \{u_1, ..., u_i, ..., u_n\}$, $u_i : T \to \mathbb{R}$, donnant le gain de chaque joueur pour tous les noeuds terminaux qui peuvent être atteints.

Définition d'une stratégie dans un jeu dynamique

Règle de décision spécifiant ce qu'un joueur va "faire" dans n'importe laquelle des situations où il est appelé à agir.

$\Rightarrow$ **Plan d'action** qui indique comment un joueur prévoit de jouer en n'importe lequel de ses EI.

Definition

- Soit Ψ_i la collection des m ensembles d'information, h, du joueur i,
- Soit A, l'ensemble de toutes les actions possibles dans le jeu,
- Et soit $C(h) \subset A$, les actions possibles dans l'EI h.

Une stratégie pour le joueur i associe une action à tout $h \in \Psi_i$: $s_i : \Psi_i \rightarrow A$ telle que $s_i(\Psi_i) = (a_i(h^1), a_i(h^2), ..., a_i(h^m))$ avec $a_i(h) \in C(h)$ pour tout $h \in \Psi_i$.

Définition d'une stratégie : exemple

Rq. Une stratégie spécifie souvent les actions jouées à des EI qui ne sont pas atteints au cours du jeu effectivement joué.

Exemple. Jeu de la pièce en information parfaite, J2 joue en premier

La stratégie de J2 indique quelle est son action au noeud initial.

Deux stratégies possibles : jouer P ou jouer F.

Pour J1, une stratégie précise comment il joue (P et F) à chacun de ses deux EI.

CAD comment il joue si J2 joue F **et** comment il joue si J2 joue P.

Jeu de la pièce - 2

J1 a donc 4 stratégies possibles :

s_{11} : jouer F si J2 joue F ; jouer F si J2 joue P ;
s_{12} : jouer F si J2 joue F ; jouer P si J2 joue P ;
s_{13} : jouer P si J2 joue F ; jouer F si J2 joue P ;
s_{14} : jouer P si J2 joue F ; jouer P si J2 joue P.

$\Rightarrow$ L'action de J1 est conditionnée au choix de J2.

Cela suppose de pouvoir observer sa décision : information parfaite.

Si J1 ne peut observer le choix de J2 : un seul EI et seulement deux stratégies possibles : jouer P ou jouer F.

Stratégies, résultats et forme normale

Tout profil de stratégies $s = (s_1, ..., s_i, ..., s_n)$ est associé à un résultat du jeu (une suite de décisions prises par les joueurs).

$\Rightarrow$ Vecteur de gains générés par n'importe quel profil de stratégie.

Représentation possible sous la forme normale = forme condensée.

Tout jeu sous forme extensive admet une représentation sous forme normale....

à condition que les stratégies soient bien spécifiées.

Comment obtenir la solution d'un jeu dynamique ?

S'appuyer sur la notion de **meilleure réponse** : *a priori*, représentation sous forme normale et équilibre de Nash.

Jeu d'entrée sur un marché à deux joueurs : firme I et firme E.

FE choisit d'abord d'entrer ou de rester extérieure au marché.

Si elle n'entre pas, elle ne retire aucun gain et la firme I conserve son paiement (2).

Si FE décide d'entrer sur le marché, alors FI peut tolérer la nouvelle entrante, sans qu'il n'y ait aucune répercussion sur le prix (gains respectifs 2 et 1).

Ou bien, elle peut choisir de se lancer dans une guerre des prix : baisse du prix de marché (pertes -3 et -1).

Comment obtenir la solution d'un jeu dynamique ? - 2

Représentation sous forme normale : 2 équilibres de Nash (NE, G si E) et (E, A si E).

Problème : (NE, G si E) est une prédiction incorrecte.

La stratégie de la firme I repose sur une menace non crédible.

$\Rightarrow$ **Le concept d'équilibre de Nash est insuffisant** car ne permet pas d'exclure les solutions basées sur des stratégies non crédibles.

L'induction rétroactive - 1

L'induction rétroactive - 2

Concept de solution qui élimine les prédictions basées sur des stratégies non crédibles.

2 hypothèses :

1/ **Rationalité séquentielle** : la stratégie d'équilibre doit spécifier les actions optimales des joueurs en n'importe quel noeud de l'arbre.

Jeu précédent : la stratégie G si FE joue E n'est pas optimale pour FI : si E entre effectivement, la stratégie optimale est A.

2/ **Connaissance commune** du fait que les joueurs vont se comporter de manière rationnelle à chaque noeud de décision.

Raisonnement dans un jeu (à horizon) fini

1. On se place en n'importe lequel des noeuds qui précèdent les noeuds terminaux : dernière étape.

   Si le joueur i (décisionnaire en ce noeud) est rationnel alors il va opter pour l'action qui est la meilleure pour lui.

   $\Leftrightarrow$ Celle qui lui procure le gain le plus élevé.

   Autant de fois que de noeuds de décisions pour J_i.

2. Ensuite, on se place donc au niveau du noeud prédécesseur du (des) noeud(s) étudié(s) en 1/ : avant dernière étape.

   Etude du problème du joueur $i-1$ jouant juste avant J_i.

Raisonnement dans un jeu (à horizon) fini

1. On se place en n'importe lequel des noeuds qui précèdent les noeuds terminaux : dernière étape.

   Si le joueur i (décisionnaire en ce noeud) est rationnel alors il va opter pour l'action qui est la meilleure pour lui.

   $\Leftrightarrow$ Celle qui lui procure le gain le plus élevé.

   Autant de fois que de noeuds de décisions pour J_i.

2. Ensuite, on se place donc au niveau du noeud prédécesseur du (des) noeud(s) étudié(s) en 1/ : avant dernière étape.

   Etude du problème du joueur $i - 1$ jouant juste avant J_i.

Raisonnement dans un jeu (à horizon) fini

1. On se place en n'importe lequel des noeuds qui précèdent les noeuds terminaux : dernière étape.

   Si le joueur i (décisionnaire en ce noeud) est rationnel alors il va opter pour l'action qui est la meilleure pour lui.

   $\Leftrightarrow$ Celle qui lui procure le gain le plus élevé.

   Autant de fois que de noeuds de décisions pour J_i.

2. Ensuite, on se place donc au niveau du noeud prédécesseur du (des) noeud(s) étudié(s) en 1/ : avant dernière étape.

   Etude du problème du joueur $i-1$ jouant juste avant J_i.

Raisonnement - 2

Le joueur $i-1$ est **capable d'anticiper correctement la réaction qui suivra son action**.

Il sait que J_i est rationnel et donnera une meilleure réponse.

$\Rightarrow$ Jeu réduit où le noeud considéré en 1/ devient terminal : on lui assigne le paiement associé à l'action choisie par i.

Dans ce jeu réduit J_{i-1} opte pour l'action la meilleure pour lui étant donné son anticipation.

Troisième étape (etc.) : on répète la procédure jusqu'à ce qu'on "remonte" au noeud initial.

Jeu d'entrée sur le marché

On commence par se placer au noeud de décision de J2 (FI). Choix entre A et G : il choisit A puisque 1>-1.

On obtient ensuite un jeu réduit où le noeud de J2 devient un noeud terminal associé au paiement (2,1).

Etude ensuite du problème de J1 (FE) : sa stratégie optimale est E puisque 2>0.

La solution obtenue est le seul équilibre de Nash qui repose sur des menaces crédibles : (E, A si E).

Jeu abstrait à trois joueurs

Noeuds prédécesseurs des noeuds terminaux : ceux où J3 joue.

Détermination de la meilleure action de J3 en ces noeuds.

Ensuite, problème du joueur qui joue juste avant J3. D'abord J2 qui joue après J1 ou ne joue pas.

Enfin noeud initial pour déterminer la stratégie optimale du J1.

Quelle est la solution ?

Rq. Cette solution correspond à un équilibre de Nash du jeu sous forme normale.

Le jeu du mille-pattes

Situation où deux joueurs ont un **intérêt mutuel** à faire durer une relation alors qu'**individuellement** il existe un intérêt à l'arrêter.

Départ du dernier noeud de décision : Troisième étape où le J1 doit décider entre les actions α et δ.

Seconde étape où c'est au tour de J2 de décider s'il poursuit la relation (*a*) ou la stoppe (*d*) ; sachant ce que fera J1 s'il poursuit.

Remplacement du noeud de décision par le noeud terminal associé aux gains correspondants etc.

Remarque

La solution obtenue par induction rétroactive est celle où la relation est interrompue dès la première étape par le J1.

Les deux auraient obtenu mieux en "coopérant" ou en s'engageant (par contrat) sur les stratégies jouées.

Cette absence de capacité à s'engager empêche d'atteindre la troisième étape où les gains sont strictement meilleurs pour les deux joueurs.

Théorème de Zermelo

Theorem

Tout jeu fini dynamique en information parfaite admet un équilibre de Nash en stratégies pures que l'on peut déterminer en appliquant l'induction rétroactive.

De plus, si aucun joueur n'a le même gain à deux noeuds terminaux différents, alors cet équilibre (obtenu grâce à l'IR) est unique.

Représention sous forme de programme d'optimisation

Cadre simple d'un jeu à deux joueurs et deux étapes :

- J1 choisit d'abord son action a_1 dans l'ensemble des actions possibles A_1.
- J2 choisit ensuite sa propre action a_2 dans son l'ensemble A_2.
- Les gains sont égaux à $u_1(a_1, a_2)$ et $u_2(a_1, a_2)$.

Rq1. l'ensemble des actions disponibles pour J2 peut dépendre de l'action choisie par J1 : $A_2(a_1)$.

Rq2. Description de nombreux problèmes économiques, comme le duopole de Stackelberg ou le modèle de Leontieff etc.

Résolution par IR

D'abord, étude du problème de J2 (seconde étape) :

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2), \; a_1 \text{ donnée}$$

Supposez que pour chaque a_1 la solution de ce problème est unique.

$\Rightarrow$ Fonction de réaction (meilleure réponse) : $R_2(a_1)$.

Première étape : remplacement de la stratégie de J2 par sa meilleure réponse dans le problème de J1 :

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1))$$

J1 est rationnel et peut anticiper que J2 rationnel jouera une meilleure réponse à n'importe laquelle de ses actions.

$\Rightarrow$ Sous les bonnes propriétés, la solution du jeu $(a_1^*, R_2(a_1^*))$.

Avantages et inconvénient de l'IR

L'IR permet de sélectionner les seuls équilibres de Nash basés sur des stratégies crédibles.

Méthode "intuitive" : connaissance commune de la rationalité (séquentielle) des joueurs.

$\Rightarrow$ Possible d'anticiper, à n'importe quelle étape (noeud), quelles seront les actions choisies ensuite.

Problème : inopérante dès qu'on sort du cadre des jeux à information parfaite et à horizon fini.

$\Rightarrow$ **Perfection en sous-jeux** : extension de la méthode au delà de cette classe de jeux dynamiques.

Principe

Exploiter la propriété essentielle de l'IR :

Les stratégies d'équilibre du jeu de départ constituent un équilibre pour n'importe quelle *partie* – sous-jeu – du jeu complet.

La perfection en sous-jeux étant cette propriété pour les jeux dynamiques à **information imparfaite**.

Jeu d'entrée : une fois que la firme E décide d'entrer, les deux firmes choisissent simultanément une stratégie parmi A et G.

Raisonnement - 1

Jeu en information imparfaite : à la dernière étape, FI ne sait pas en quel noeud de son ensemble d'information elle se situe.

Elle ne peut observer l'action choisie par FE...

De même FE ne peut observer le choix de FI : **Jeu simultané** intégré dans l'arbre du jeu.

Raisonnement - 2

Pour FE, deux noeuds de décisions, 4 stratégies possibles :

- NE, A si E
- NE, G si E
- E, A si E
- E, G si E

Pour FI, un seul ensemble d'information et deux stratégies : A et G.

Quel est le nombre d'équilibres de Nash ?

Raisonnement - 3

L'IR est inopérante : avant les noeuds terminaux, on ne trouve pas un noeud mais un ensemble d'information.

L'équilibre de Nash du jeu simultané (suivant l'entrée) est (A,A)

Les joueurs devraient anticiper qu'ils joueront A en suivant l'entrée.

Mais si c'est le cas, alors FE devrait entrer.

⇒ La rationalité séquentielle suggère que seul (E, A si E ; A) est une prédiction raisonnable : équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

Sous jeu d'un jeu sous forme extensive

Definition

Un sous jeu Γ d'un jeu sous forme extensive G_E est un sous ensemble du jeu qui a les propriétés suivantes : Il

1. Débute en un EI qui contient un noeud unique,
2. Englobe tous les noeuds successeurs (immédiats et suivants), et ne contient que ces noeuds.
3. Si le noeud de décision $x \in \Gamma$ alors tout $x' \in h(x)$ s'y trouve également : $x' \in \Gamma$, avec $h(x)$ l'EI contenant x.

$\Rightarrow$ Les ensembles d'information ne peuvent être rompus.

Exemple. Jeu de l'entrée avec décisions simultanées après l'entrée.

Remarques

- Lien entre perfection en sous-jeux (PSJ) et IR :

  Dans un jeu fini en information parfaite, tous les noeuds de décision sont associés à un sous jeu.

  La solution calculée par IR est un EN parfait en sous jeu

  Elle a la propriété de continuer à être une solution de n'importe quel sous jeu qui compose le jeu entier.

- Manière de raisonner avec la perfection en sous-jeux :

  Etudié de manière isolé, **n'importe quel sous jeu constitue un jeu à part entière**.

  $\Rightarrow$ Recherche des équilibres de Nash dans chaque sous-jeu.

Remarques

- Lien entre perfection en sous-jeux (PSJ) et IR :

  Dans un jeu fini en information parfaite, tous les noeuds de décision sont associés à un sous jeu.

  La solution calculée par IR est un EN parfait en sous jeu

  Elle a la propriété de continuer à être une solution de n'importe quel sous jeu qui compose le jeu entier.

- Manière de raisonner avec la perfection en sous-jeux :

  Etudié de manière isolé, **n'importe quel sous jeu constitue un jeu à part entière**.

  $\Rightarrow$ Recherche des équilibres de Nash dans chaque sous-jeu.

Remarques

- Lien entre perfection en sous-jeux (PSJ) et IR :

  Dans un jeu fini en information parfaite, tous les noeuds de décision sont associés à un sous jeu.

  La solution calculée par IR est un EN parfait en sous jeu

  Elle a la propriété de continuer à être une solution de n'importe quel sous jeu qui compose le jeu entier.

- Manière de raisonner avec la perfection en sous-jeux :

  Etudié de manière isolé, **n'importe quel sous jeu constitue un jeu à part entière**.

  $\Rightarrow$ Recherche des équilibres de Nash dans chaque sous-jeu.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

Definition

Un profil de stratégies $s = (s_1, ..., s_i, ..., s_n)$ dans un jeu à n joueurs sous forme extensive G_E est un équilibre de Nash parfait en sous-jeux (ENPSJ) s'il constitue un équilibre de Nash pour tous les sous-jeux Γ de G_E.

Exemple 1. Jeu du mille-pattes (jeu à information parfaite, on pourrait donc résoudre par IR).

Exemple 2. Application de la perfection en sous-jeux dans un jeu abstrait (entrée en information imparfaite).

Rq. Travail sur la forme normale des sous-jeux.

Remarques

L'équilibre de Nash PSJ permet de sélectionner les seuls équilibres de Nash raisonnables des jeux sous forme extensive.

Autrement dit, **élimination des EN qui reposent sur des stratégies non crédibles**, jouées dans certains sous-jeux...

CAD ceux qui ne se trouvent pas sur le "chemin" effectivement emprunté dans l'arbre.

Détermination des ENPSJ : 2 approches

- Déterminer les EN de tous les sous-jeux et sélectionner le profil de stratégies qui constitue un EN dans tous ces sous-jeux.

- Résoudre de manière rétroactive :
  1. Partir de la "fin du jeu" et identifier les EN de chacun des sous-jeux finaux (qui ne renferment pas d'autres sous jeux).
  2. Sélectionner un EN et construire le jeu réduit où chaque sous-jeu est remplacé par les gains résultants des actions d'EN.
  3. Répéter les étapes 1 et 2 pour le jeu réduit.

  Continuer jusqu'à ce que toutes les actions dans G_E aient été déterminées.

Détermination des ENPSJ : 2 approches

- Déterminer les EN de tous les sous-jeux et sélectionner le profil de stratégies qui constitue un EN dans tous ces sous-jeux.

- Résoudre de manière rétroactive :
  1. Partir de la "fin du jeu" et identifier les EN de chacun des sous-jeux finaux (qui ne renferment pas d'autres sous jeux).
  2. Sélectionner un EN et construire le jeu réduit où chaque sous-jeu est remplacé par les gains résultants des actions d'EN.
  3. Répéter les étapes 1 et 2 pour le jeu réduit.

  Continuer jusqu'à ce que toutes les actions dans G_E aient été déterminées.

Détermination des ENPSJ : 2 approches

- Déterminer les EN de tous les sous-jeux et sélectionner le profil de stratégies qui constitue un EN dans tous ces sous-jeux.

- Résoudre de manière rétroactive :
  1. Partir de la "fin du jeu" et identifier les EN de chacun des sous-jeux finaux (qui ne renferment pas d'autres sous jeux).
  2. Sélectionner un EN et construire le jeu réduit où chaque sous-jeu est remplacé par les gains résultants des actions d'EN.
  3. Répéter les étapes 1 et 2 pour le jeu réduit.

  Continuer jusqu'à ce que toutes les actions dans G_E aient été déterminées.

Détermination des ENPSJ : multiplicité

Le profil de stratégies obtenu constitue un ENPSJ de G_E.

Si **aucun problème de multiplicité** d'EN rencontré lors de l'une quelconque des étapes ; le profil de stratégies est l'**unique ENPSJ**.

Si lors d'une étape, il y a une **multiplicité d'EN**, l'ensemble des ENPSJ est identifié en **répétant la procédure pour tous les EN**.

Théorèmes

Theorem

Tout jeu fini avec information parfaite G_E admet un ENSJP en stratégies pures.

De plus, si aucun joueur n'obtient le même gain en deux noeuds terminaux, où qui le deviennent suite à la réduction du jeu, alors cet équilibre est unique.

Théorèmes – 2

Theorem

Soit le jeu sous forme extensive G_E *et un sous-jeu* Γ *de ce jeu. Supposons que le profil de stratégies* s^Γ *est un ENPSJ de* Γ *et définissons* $\hat{G}_E$ *le jeu sous forme réduite obtenu en remplaçant le sous-jeu* Γ *par un noeud terminal où les paiement sont ceux résultant du fait de jouer* s^Γ.

(i) Pour n'importe quel ENPSJ, $s = (\hat{s}, s^\Gamma)$, *de* G_E, *les actions de* $\hat{s}$, *choisies par les joueurs aux ensembles d'information qui n'appartiennent pas à* Γ, *doivent constituer un ENPSJ du jeu réduit* $\hat{G}_E$.

Théorèmes – 3

Theorem

(ii) Si $\hat{s}$ est un ENPSJ de $\hat{G}_E$, alors le profil de stratégies s qui spécifie les actions de s^Γ à tous les ensembles d'information de Γ et qui prend les actions de $\hat{s}$ à tous ceux qui n'appartiennent pas à Γ est un ENPSJ de G_E.

Version dynamique du modèle de Cournot

Deux firmes se font concurrence (imparfaite) mais **n'ont pas la même position dans l'industrie**.

La firme 1 a une **position de leader** : firme qui a un rôle de précurseur en termes de politique industrielle, commerciale etc.

La firme 2 a une **position de suiveur** : elle s'adapte aux décisions du leader.

Les décisions portent sur les quantités : **la firme 1 joue en premier, la firme 2 en second**

Exemple. position de General Motors dans l'industrie automobile US.

Le timing du jeu

La firme 1 (leader) choisit la quantité à produire et offrir $q_1 \geq 0$.

La firme 2 (suiveur) observe la décision de la firme 1 et doit à son tour décider quelle quantité produire $q_2 \geq 0$.

La demande de marché s'exprime par : $p(Q) = a - Q$ avec $a \geq 0$ et Q la quantité demandé du bien.

Equilibre de marché : $Q = q_1 + q_2$.

L'objectif de chaque firme i est de maximiser ses profits :
$\pi_i(q_i, q_{-i}) = (a - (q_i + q_{-i}))q_i - \frac{cq_i^2}{2}$ avec $c > 0$.

Le problème

Deux joueurs trouvent 1 euro et doivent décider d'un partage.

Chaque joueur est neutre au risque et actualise le futur à un taux exponentiel.

Si un joueur obtient x euro à la date t, la valeur actualisée de x à la date 0 sera $\delta^t x$ avec $\delta \in (0, 1)$, le facteur d'actualisation.

L'ensemble de toutes les divisions possibles est $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / x + y \leq 1\}$.

Jeu en 2 étapes : le scénario

Lors de la première étape, J1 fait une offre de partage $(x_1, y_1) \in D$.

J2 reçoit l'offre et décide soit de l'accepter soit de la rejeter.

S'il accepte l'offre, alors le jeu se termine et le résultat est (x_1, y_1).

S'il la rejette l'offre, deuxième étape J2 fait une contre-offre $(x_2, y_2) \in D$.

Jeu en 2 étapes : le scénario – 2

Le J1 observe cette offre et décide de l'accepter ou de la refuser.

Si J1 accepte l'offre alors elle détermine le partage de l'euro et chaque joueur obtient le gain actualisé : $(\delta x_2, \delta y_2)$.

Si les deux joueurs refusent l'offre qui leur est faite, alors le jeu se termine et le dollar est perdu, les gains sont $(0, 0)$.

Résolution par IR.

Jeu d'offres/contre-offres répété n fois

S'ils ne trouvent pas d'accord en seconde étape, alors troisième étape où J1 propose une nouvelle offre $(x_3, y_3) \in D$.

Si elle est acceptée par $J2$ alors chacun obtient le gain actualisé associé : $(\delta^2 x_3, \delta^2 y_3)$.

Si J2 rejette l'offre alors nouvelle contre-offre $(x_4, y_4) \in D$ etc.

Cela peut continuer jusqu'à l'étape $2n$. S'ils ne se sont toujours pas entendus à cette date, le jeu se termine et l'euro est perdu.

Le problème

Deux pays identiques, $i = 1, 2$.

3 types d'agents :

- 1 gouvernement décide d'une taxe sur les importations,
- 1 firme produit un bien pour la consommation domestique et les exportations,
- des consommateurs achètent le bien sur le marché national, alimenté par la firme nationale et la firme étrangère.

Le modèle

Soit Q_i la quantité totale du bien disponible sur le marché du pays i.

Prix d'équilibre du marché : $p_i(Q_i) = a - Q_i$.

La firme i produit une quantité h_i destinée au marché domestique et e_i pour les exportations : $Q_i = h_i + e_j$.

Elle supporte un coût de production unitaire constant $c < a$ et la taxe sur les importations imposée par le gouvernement j : taux unitaire t_j.

Le timing

D'abord les gouvernements choisissent simultanément les taxes $\{t_i, t_j\}$.

Ensuite, les firmes observent les taux de taxe et décident simultanément quelle paire $\{h_i, e_i\}$ produire.

Les fonctions de gain sont le profit pour les firmes et le bien-être social pour les gouvernements.

Bien-être social : somme du profit, du surplus des consommateurs et du revenu fiscal.