TUTORAT EN ORGANISATION INDUSTRIELLE

L3 – S5

Année universitaire 2014-2015

Chargé de CM : Edmond BARANES

Chargé du tutorat : Sylvain HOURS

ÉNONCÉS DES EXERCICES

COMPLÉMENTS SUR LE MONOPOLE

EXERCICES CORRIGÉES

QUESTIONS DE COURS CORRIGÉES

KIT DE SURVIE EN RECHERCHE D'EXTREMA LIÉS

KIT DE SURVIE EN THÉORIE DES JEUX

EXERCICE 1 : LE MONOPOLE

En France, le transport ferroviaire de voyageurs est l'affaire exclusive de la SNCF. Cette-dernière a identifié que, quotidiennement, la demande de voyages entre Montpellier et Paris est donné par la fonction $D(P) = 12000 - 100P$. De plus, le coût moyen de production d'un voyage est égal à 30€.

1) *Rappelez les hypothèses sous-jacentes au modèle de monopole.*
2) *Dérivez et commentez la règle de tarification optimale d'une entreprise en situation de monopole en faisant apparaitre (i) l'indice de Lerner et l'élasticité de la demande (ii) les fonctions de coûts et de recette marginales.*
3) *Déterminez le couple (p^m, q^m) à l'équilibre du monopole et déduisez-en le profit optimal ainsi que le surplus du consommateur et le bien-être social à l'équilibre du modèle.*
4) *Déterminez le couple (p^*, q^*) à l'équilibre concurrentiel et déduisez-en le profit optimal ainsi que le surplus du consommateur et le bien-être social à l'équilibre du modèle.*
5) *Représentez graphiquement les deux équilibres précédemment calculés et faites apparaitre la « perte sèche » engendrée par le monopole. Calculez son montant.*

EXERCICE 2 : LA DISCRIMINATION PAR LES PRIX

Monsieur Karloff gère de façon rationnelle une salle de cinéma qui, en projetant en exclusivité et en V.O. des films d'épouvante polonais, dispose d'un monopole. On connait l'expression de sa fonction de coût total :

$$C(Q) = 10Q$$

Il décide de pratiquer une discrimination entre les spectateurs étudiants (E) et les non-étudiants (NE) dont on connait les fonctions de demande.

$$D_E(P) = 250 - \frac{15P}{3}$$

$$D_{NE}(P) = 150 - \frac{5P}{3}$$

1) *Rappelez ce qu'est la discrimination par les prix. Quel est l'objectif d'une telle politique tarifaire ? Quelles sont les trois formes de discrimination au sens de Pigou? Quelle forme est envisagée dans le cadre de cet exercice ? À quelles conditions une telle pratique peut-elle être mise en œuvre ? Est-elle légale ?*
2) *Dérivez et commentez la règle de tarification optimale d'une telle pratique puis déterminez les couples (P_E^*, Q_E^*) et (P_{NE}^*, Q_{NE}^*) à l'équilibre du monopole discriminant. Déduisez-en le niveau profit optimal, le surplus des étudiants et des non-étudiants, l'élasticité-directe-prix de chacun des groupes et le bien-être social à la solution du modèle.*
3) *Commentez les effets de la discrimination sur le profit du cinéma, sur le surplus des étudiants et des non-étudiants ainsi que sur le bien-être social en comparant ces valeurs à celles qui auraient été obtenues si Karloff avait pratiqué un tarif unique.*

EXERCICE 3 : LES RELATIONS VERTICALES

Dans un petit village des Cévennes, Claire est productrice de pélardon. Son coût total de production est donné par la fonction $C(q) = cq$ *avec* $c > 0$.

Supposons dans un premier temps qu'elle n'ait pas la possibilité de vendre directement ses fromages sur le marché. C'est Régine, la gérante du supermarché local, qui lui achète ses fromages au prix de gros unitaire ω *pour ensuite les distribuer auprès de la clientèle de son magasin au prix de détail unitaire* p. *On supposera que le coût de distribution est nul. La fonction de demande des consommateurs est* $D(P) = a - bP$ *avec* $\frac{a}{b} > c$.

1) *Représentez la chaîne verticale. À quel type de jeu a-t-on affaire ici? Représentez-le sous forme développée. Quelle méthode nous permettra de résoudre ce modèle ?*
2) *Déterminez le prix de détail optimal* p^* *choisi par Régine ainsi que le prix de gros optimal* ω^* *choisi par Claire. Déduisez-en la quantité de fromage* q^* *écoulée sur le marché, le profit de Régine (*Π_R^**), celui de Claire (*Π_C^**), le surplus des consommateurs* S^* *et enfin le bien-être social* W^*.

Supposons désormais que Claire ait la possibilité de vendre directement ses fromages auprès des consommateurs.

3) *Préfèrera-t-elle continuer à passer par l'intermédiaire de Régine ou à servir directement les consommateurs ? Quelle option serait préférée par ces derniers ? Qu'en dirait le maire du village (supposé rechercher le plus grand bien-être social possible pour sa communauté) ? Commentez vos réponses.*

Supposons enfin que des restrictions verticales puissent être introduites.

4) *En quoi consistent de telles restrictions ? Quel en est l'objectif ?*
5) *Si Claire pouvait proposer à Régine un contrat de franchise (tarification binôme du type* $T(q) = A + \omega q$*), quel serait le contrat optimal* (ω^F, A^F) *choisi par Claire. Qu'en serait-il si c'était Régine qui pouvait définir les termes d'un tel contrat ? Commentez vos réponses.*
6) *Si Claire avait la possibilité de mettre en œuvre un prix de revente imposé, quel serait le prix* p^{PRI} *qu'elle choisirait ? Déduisez-en le prix de gros* ω^{PRI} *qu'elle mettrait en œuvre ainsi que le profit qu'elle réaliserait ainsi que celui de Régine. Une telle pratique existe-t-elle ? Commentez vos réponses.*

EXERCICE 4 : CONCURRENCE ET INTERACTIONS STRATÉGIQUES

Supposons que Samsung et Apple se partagent le marché des Smartphones. Les biens produits par ces deux firmes sont supposés être homogènes.

Dans un premier temps, les deux firmes sont en concurrence par les prix. De plus, elles sont technologiquement symétriques ($c_A = c_S = c$). Si les firmes vendent leur bien au même prix, alors la demande se partage également entre Samsung et Apple.

1) *En fonction de p_A et de p_S, déterminez la demande $D_i(p_i, p_{-i})$ avec $i = \{A, S\}$ s'adressant à chacun des firmes.*
2) *Déterminez les prix optimaux p_A^* et p_S^* choisis simultanément par les firmes. Déduisez-en leur niveau de profit optimal. Commentez.*
3) *En quoi l'introduction de contraintes de capacité, de répétition de interactions ou de différentiation des biens pourraient modifier l'équilibre du modèle ?*

Supposons désormais que $c_A > c_S$

4) *En fonction du différentiel d'efficacité qui sépare Samsung et Apple, déterminez les prix optimaux p_A^{**} et p_S^{**} choisis simultanément par les firmes.*

Supposons désormais que les firmes soient en concurrence par les quantités. La fonction de demande inverse s'adresse à elle est alors donnée par $P(Q) = a - bQ$ avec $Q = q_A + q_S$ et $a > c_S$. Nous nous intéresserons au cas pour lequel $c_A > c_S$.

5) *Déterminez les quantités optimales q_A^* et q_S^* choisies simultanément par les deux firmes. Déduisez-en le profit optimal dégagé par chacune des firmes. Commentez.*

EXERCICE 5 : LA DIFFÉRENTIATION HORIZONTALE

Anna et Boris vendent des glaces sur la plage reliant la Grande Motte à Palavas-les-Flots.

Anna vend ses glaces p_A€ et Boris p_B€. Ils ont le même coût unitaire de production $c > 0$.

Représentons cette plage par le segment $[0,1]$, 0 étant la localisation de la Grande Motte et 1 celle de Palavas-les Flots. Le magasin d'Anna est localisé en $a \in [0,1[$ et celui de Boris en $b \in]0,1]$ tel que $a \leq b$. On considère dans un premier temps que cette localisation est donnée de manière exogène. Si $a = b$, alors la demande se partage également entre Anna et Boris.

On suppose que les individus (consommateurs) présents sur cette plage y sont répartis de manière uniforme : $\Theta \sim \mathcal{U}[0,1] \Rightarrow f(\theta) = 1,\ F(\theta) = \theta$ où la variable aléatoire Θ caractérise la localisation d'un individu.

Manger une glace permet à chaque consommateur d'avoir un niveau d'utilité brute $u > 0$.

Cependant, puisqu'ils doivent se déplacer au magasin d'Anna ou à celui de Boris, les consommateurs souffrent d'un coût de transport unitaire $t > 0$.

Chacun des consommateurs peut soit acheter une glace à Boris, soit à Anna, soit ne pas en acheter.

Enfin, l'utilité de réserve est normalisée à zéro et la distance est mesurée linéairement.

1) *Qu'entend-on par « différentiation » ? Rappelez brièvement ce qui distingue la différentiation horizontale de la différentiation verticale. À quel type de différentiation a-t-on affaire ici ?*
2) *Déterminez le niveau d'utilité final d'un consommateur $\theta \in [a, b\ ]$ lorsque celui-ci achète une glace à Anna (U_A) puis lorsque celui-ci achète une glace à Boris (U_B).*
3) *Déterminez les conditions générales sous lesquelles le marché sera couvert. De même, déterminez sous quelles conditions le marché serait monopolisé ou par Anna ou par Boris.*

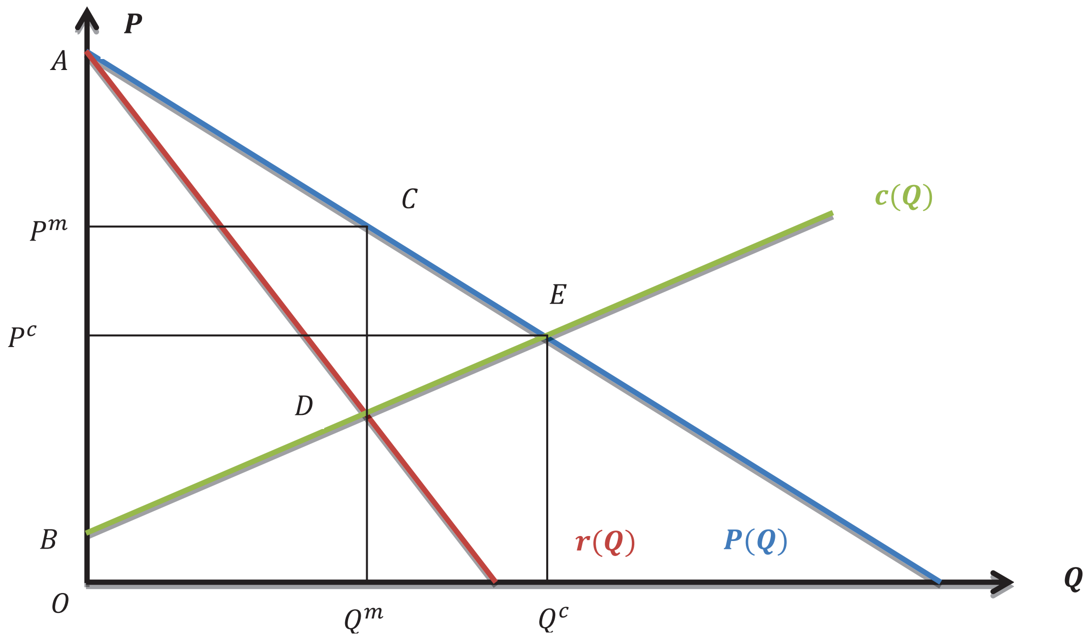
Supposons qu'à l'équilibre, le marché soit couvert et non monopolisé.

4) *Que peut-on en déduire quant à la localisation du consommateur indifférent $\tilde{\theta}$ et quant à la demande qui s'adressera à Anna et Boris.*
5) *Déterminez la localisation du consommateur indifférent $\tilde{\theta}$ et déduisez-en les demandes qui s'adressent à Anna et à Boris.*
6) *Déterminez les prix p_A^* et p_B^* choisis simultanément par Anna et Boris. Déduisez-en la demande s'adressant à chacun d'entre eux à la solution du modèle.*
7) *Calculez le profit réalisé par Anna et par Boris à la solution du modèle. Si on leur offrait la possibilité de modifier leur localisation, préféreront-ils se déplacer vers l'intérieur ou l'extérieur du segment ? Commentez puis déterminez la localisation choisie par Anna et celle choisie par Boris à la solution du modèle*
8) *Supposons désormais que la distance soit mesurée de manière quadratique. Déterminez la localisation choisie par Anna et celle choisie par Boris à la solution du modèle. Commentez.*

QUELQUES COMPLEMENTS SUR LE MONOPOLE

1) Mise en évidence graphique du triangle d'Harberger

Nous l'avons vu, la règle de tarification linéaire d'un monopole non régulé génère ce que l'on appelle un poids mort (Dead Weight Loss) par rapport à l'équilibre concurrentiel. Nous avions mise en évidence graphiquement ce poids mort dans lorsque la fonction de coût était linéaire, à présent, faisons de même avec une fonction de coût strictement croissante et strictement convexe nous donnant une fonction de coût marginal linéaire strictement croissante.



$r(Q)$ = Recette marginale, $c(Q)$ = Coût marginal, (P^m, Q^m) = Équilibre du monopole, (Q^c, P^c) = Équilibre concurrentiel

Dans le cas de l'équilibre concurrentiel, le profit de la firme est égal aux recettes OP^cEQ^c moins les coûts $OBEQ^c$. Le profit est donc représenté par le triangle BP^cE. Le surplus des consommateurs est lui égal au triangle AP^cE. Le bien-être défini ici comme la somme des profits et du surplus des consommateurs est donc égal au triangle ABE.

A l'équilibre du monopole, le profit de l'entreprise est égal aux recettes OP^mCQ^m moins les coûts $OBDQ^m$. Le profit est donc représenté par le trapèze $BDCP^m$. Le surplus des consommateurs est lui égal au triangle AP^mC. Le bien-être défini ici comme la somme des profits et du surplus des consommateurs est donc égal au trapèze $ABDC$.

Calculons à présent la variation de bien être due au passage d'un équilibre concurrentiel à un équilibre monopolistique : $\Delta W = ABE - ABDC = CDE$

Le triangle CDE mesure donc la perte de bien être engendré par la monopolisation du marché, il s'agit du triangle d'Harberger.

2) Le monopole multi produits

Considérons ici le cas le plus simple dans lequel le monopole produit seulement 2 biens indicés par $i = \{1, 2\}$. A chaque produit est associé une fonction de demande dépendant du prix des deux biens (les marchés ne sont pas indépendants) : $q_i = D_i(p_1, p_2)$. On suppose par ailleurs une fonction de coût total séparable du type $C(q_1, q_2) = C_1(q_1) + C_2(q_2)$
Le programme du monopole est alors le suivant :

$$\max_{p_1,p_2} \Pi(p_1, p_2) = D_1(p_1, p_2)p_1 + D_2(p_1, p_2)p_2 - C_1\big(D_1(p_1, p_2)\big) - C_2(D_2(p_1, p_2))$$

Développons par exemple la condition première relative au prix p_1

$$\frac{\partial \Pi(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial D_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} p_1 + D_1(p_1, p_2) + \frac{\partial D_2(p_1, p_2)}{\partial p_1} p_2 - \frac{\partial C_1\big(D_1(p_1, p_2)\big)}{\partial D_1(p_1, p_2)} \frac{\partial D_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} - \frac{\partial C_2\big(D_2(p_1, p_2)\big)}{\partial D_2(p_1, p_2)} \frac{\partial D_2(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0$$

Notons $c_i = \frac{\partial C_i(D_i(p_1,p_2))}{\partial D_i(p_1,p_2)}$, la CPO s'écrit alors :

$$\frac{\partial D_1(p_1,p_2)}{\partial p_1}(p_1 - c_1) = -D_1(p_1,p_2) - \frac{\partial D_2(p_1,p_2)}{\partial p_1}(p_2 - c_2)$$

$$(p_1 - c_1) = -D_1(p_1,p_2)\frac{\partial p_1}{\partial D_1(p_1,p_2)} - \frac{\partial D_2(p_1,p_2)}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial D_1(p_1,p_2)}(p_2 - c_2)$$

$$\frac{(p_1 - c_1)}{p_1} = -\frac{D_1(p_1,p_2)}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial D_1(p_1,p_2)} - \frac{\partial D_2(p_1,p_2)}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial D_1(p_1,p_2)}\frac{p_2 - c_2}{p_1}$$

Définissons l'élasticité de la demande de bien i par rapport au prix du bien $j$comme $\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial D_i(p_1,p_2)}{\partial p_j}\frac{p_j}{D_i(p_1,p_2)}$

On peut alors réécrire la CPO :

$$\frac{(p_1 - c_1)}{p_1} = \frac{1}{\varepsilon_{11}} - \frac{\partial D_2(p_1,p_2)}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial D_1(p_1,p_2)}\frac{p_2 - c_2}{p_1}\frac{p_1}{p_1}\frac{D_1(p_1,p_2)}{D_1(p_1,p_2)}\frac{D_2(p_1,p_2)}{D_2(p_1,p_2)}$$

Utilisons un jeu de couleurs pour mettre en évidence les élasticités dans le dernier terme :

$$\frac{(p_1 - c_1)}{p_1} = \frac{1}{\varepsilon_{11}} - \frac{\partial D_2(p_1,p_2)}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial D_1(p_1,p_2)}\frac{p_2 - c_2}{p_1}\frac{p_1}{p_1}\frac{D_1(p_1,p_2)}{D_1(p_1,p_2)}\frac{D_2(p_1,p_2)}{D_2(p_1,p_2)}$$

$$\frac{(p_1 - c_1)}{p_1} = \frac{1}{\varepsilon_{11}} - \frac{p_2 - c_2}{p_1}\frac{D_2(p_1,p_2)}{D_1(p_1,p_2)}\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}}$$

Nb : Si l'élasticité croisée est nulle, on retrouve la règle d'équilibre simple du monopole mono-produit.

Remarque : On pourrait faire la même chose en prenant l'autre condition du premier ordre.

Ce déroulement analytique avait pour but de donner une illustration simple de la règle de tarification du monopole multi-produit à N biens qui est difficilement dérivable. La voici pour rappel:

$$\frac{(p_i - c_i)}{p_i} = \frac{1}{\varepsilon_{ii}} - \frac{\sum_{j\neq i}(p_j - c_j)D_j\varepsilon_{ij}}{p_i D_i \varepsilon_{ii}}$$

Discutons à présent les deux cas qui peuvent se présenter à nous relativement à la nature des interactions entre les marchés :

Cas n° 1 : Les biens sont des substituts

$$\frac{\partial D_i(p_i,p_j)}{\partial p_j} > 0 \rightarrow \varepsilon_{ij} = -\frac{\partial D_i(p_1,p_2)}{\partial p_j}\frac{p_j}{D_i(p_1,p_2)} < 0 \rightarrow \frac{\sum_{j\neq i}(p_j - c_j)D_j\varepsilon_{ij}}{p_i D_i \varepsilon_{ii}} < 0 \rightarrow \frac{(p_i - c_i)}{p_i} > \frac{1}{\varepsilon_{ii}} \leftrightarrow 1 - \frac{c_i}{p_i} > \frac{1}{\varepsilon_{ii}} \leftrightarrow p_i > p_i^m$$

Où p_i^m serait le prix du bien i mis en œuvre par un monopole mono-produit produisant uniquement le bien i. Cette nouvelle règle de tarification s'interprète simplement comme la prise en considération les interactions concurrentielles entre les différents biens (proposer un bien à un prix relativement élevé stimule la demande des autres biens)

Cas n° 2 : Les biens sont des compléments

$$\frac{\partial D_i(p_i,p_j)}{\partial p_j} < 0 \rightarrow \varepsilon_{ij} = -\frac{\partial D_i(p_1,p_2)}{\partial p_j}\frac{p_j}{D_i(p_1,p_2)} > 0 \rightarrow \frac{\sum_{j\neq i}(p_j - c_j)D_j\varepsilon_{ij}}{p_i D_i \varepsilon_{ii}} > 0 \rightarrow \frac{(p_i - c_i)}{p_i} < \frac{1}{\varepsilon_{ii}} \leftrightarrow 1 - \frac{c_i}{p_i} < \frac{1}{\varepsilon_{ii}} \leftrightarrow p_i < p_i^m$$

Où p_i^m serait le prix du bien i mis en œuvre par un monopole mono-produit produisant uniquement le bien i. Cette nouvelle règle de tarification s'interprète simplement comme la prise en considération de l'externalité positive liée au mécanisme implicite de subvention entre les différents biens (proposer un bien à un prix relativement bas stimule la demande des autres biens du fait de leur complémentarité).

NOM :
PRÉNOM :

ORGANISATION INDUSTRIELLE - EXAMEN BLANC

- L3 - Année universitaire 2011/2012 -

INSTRUCTIONS :

- Vous avez **2h** pour répondre à l'ensemble des questions suivantes.
- Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices non programmables sont autorisées.
- L'énoncé est constitué de **5 pages**. Assurez-vous que celui-ci est complet.
- Dans la **PARTIE 1**, il vous est demandé de préciser si chaque proposition est **VRAIE** ou **FAUSSE**. Entourez les lettres associées aux propositions justes et barrez entièrement les propositions fausses. Toute proposition n'étant ni entourée ni barrée sera considérée comme une non-réponse. Aucune justification n'est demandée dans cette partie.
- Dans la **PARTIE 2**, il vous est demandé d'entourer **LA** bonne réponse de chaque question en entourant la lettre y étant associée. Inutile de barrer les propositions fausses. Veuillez détailler vos raisonnements et calculs sur votre copie d'examen. Toute réponse non justifiée ne sera pas comptabilisée dans la notation
- Les mauvaises réponses n'affectent pas votre note négativement.
- Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.
- N'oubliez pas de glisser cet énoncé dans votre copie d'examen avant de le rendre.
- Merci d'écrire **LISIBLEMENT**.

Bon courage !

PARTIE 1 : QUESTIONS DE COURS (8 points – 40min)

1) Le paradigme de concurrence pure et parfaite dans un marché repose sur l'hypothèse :
   a. D'information parfaite des agents économiques
   b. De linéarité des fonctions d'offre et de demande
   c. D'atomicité de l'offre et de la demande
   d. De rendements d'échelle décroissants de la fonction de production

2) Dans un modèle de monopole simple :
   a. Le pouvoir de marché du monopole (*mark up*) est proportionnel à l'élasticité de la demande
   b. À l'équilibre, le bien être social est égal à celui qui aurait été atteint en concurrence pure et parfaite
   c. L'équilibre se trouve en égalisant le coût marginal du monopole à sa recette moyenne

3) Un exemple de discrimination par les prix est celui :
   a. D'un billet de train de 1ère classe vendu plus cher qu'un billet de 2ème classe
   b. D'une place de cinéma vendue plus chère pour la séance du Samedi soir que pour celle du Lundi matin
   c. D'un tarif étudiant au concert de Scorpions plus avantageux qu'un tarif standard

4) La discrimination du 1er degré :
   a. Permet à la firme d'augmenter son profit par rapport à une tarification non discriminante
   b. Maximise le bien être social
   c. Est souvent utilisée en pratique

5) (BONUS) La discrimination du 2ème degré :
   a. Renvoie à une situation dans laquelle l'information est parfaite mais incomplète au sens de la théorie des jeux
   b. Est mise en œuvre via des mécanismes incitatifs d'auto-sélection
   c. Contraint généralement la firme à laisser une rente informationnelle à certains consommateurs

6) Par rapport à une tarification non discriminante, la discrimination du 3ème degré :
   a. Est actuellement illégale en France
   b. Favorise les groupes de consommateurs dont l'élasticité de la demande est la plus faible
   c. Fait progresser le bien être social (défini comme la somme des profits et du surplus des consommateurs)

7) Dans un modèle de relation verticale classique (un producteur, un distributeur) :
   a. Le prix de détail choisi par la structure intégrée (fusion des deux firmes) est généralement supérieur à celui qui sera choisi par le distributeur lorsque les deux firmes sont séparées
   b. Le phénomène de double marginalisation nuit au consommateur
   c. Certaines restrictions verticales (franchises, prix de revente imposé…) peuvent permettre à la firme disposant du pouvoir de négociation de capter tout le profit de l'autre firme
   d. La résolution de ce modèle est analogue à la résolution d'un jeu dans lequel fournisseur et distributeur choisissent simultanément leur prix de vente (respectivement w et p)

8) Dans un modèle standard de concurrence à la Cournot à 2 firmes :
   a. La fonction de profit de chaque firme dépend uniquement de la quantité qu'elle offre sur le marché
   b. À l'équilibre de Nash, aucune firme n'a intérêt à dévier unilatéralement
   c. À l'équilibre de Nash, La firme la plus efficace offre une quantité plus importante que son concurrent
   d. À l'équilibre de Nash, les deux firmes font un profit nul

9) Dans un modèle standard de concurrence à la Bertrand à 2 firmes :
   a. Si les firmes sont symétriques, si le bien est homogène et s'il n'existe pas de contrainte de capacité, alors les firmes font généralement un profit strictement positif
   b. Si une firme est plus efficace que l'autre, alors le prix choisi par la firme la plus efficace coïncide avec celui qu'elle aurait choisi en situation de monopole
   c. Dans la situation décrite par le paradoxe de Bertrand, le bien être social est maximal
   d. L'équilibre de Bertrand est inchangé si l'on relâche l'hypothèse d'homogénéité du bien
   e. Les firmes peuvent parvenir à un équilibre collusif dans lequel elles dégagent des profits strictement positifs dès lors que l'on suppose que le jeu peut être répété une infinité de fois

10) La différentiation des biens :
   a. Permet aux firmes de limiter l'intensité de la concurrence et donc d'augmenter leur profit
   b. Est dite horizontale lorsque tous les consommateurs effectuent le même classement des biens
   c. Est dite verticale lorsqu'un distributeur transforme un produit (qu'il a précédemment acheté auprès d'un producteur) avant de le vendre aux consommateurs

11) Dans le modèle standard d'Hotelling à deux firmes (A et B tel que $A < B$):
   a. Si la firme A est localisée en 0 et la firme B est localisée en 1, alors la demande adressée à A est toujours égale à $\tilde{\theta}$ ($\tilde{\theta}$ étant le consommateur indifférent entre A et B)
   b. La résolution de ce modèle est analogue à la résolution d'un jeu séquentiel à information complète dans lequel les firmes choisissent d'abord simultanément les prix p_A et p_B et où, après avoir observé les prix de marché, les consommateurs choisissent simultanément à qui acheter (d_A, d_B)
   c. Lorsque la localisation est endogène et que la distance est mesurée de manière quadratique, alors les firmes cherchent à s'éloigner l'une de l'autre le plus possible (principe de différentiation maximale)
   d. Du point de vue du planificateur bienveillant qui cherche à maximiser le bien être social, la localisation optimale des firmes est donnée par $A = \frac{1}{3}$ et $B = \frac{2}{3}$

<u>PARTIE 2 : EXERCICES</u> (12 points – 1h20)

Exercice 1 : (5 points - 30min)

Supposons que la ville de Montpellier ne dispose que d'un seul cinéma en situation en monopole. Sa fonction de coût total est donnée par $C(Q) = 2Q$ où Q indique le nombre de places vendues. La fonction de demande globale qui s'adresse à lui est donnée par $D(P) = 110 - 5P$. On suppose que le cinéma est une entreprise rationnelle qui cherche à maximiser son profit.

12) Le prix optimal P^m choisi par le cinéma sera :
   a. $P^m = 2$
   b. $P^m = 12$
   c. $P^m = 20$
   d. $P^m = 50$
   e. Autre

13) À l'équilibre, le profit réalisé par le monopole est égal à :
   a. $\Pi^m = 0$
   b. $\Pi^m = 180$
   c. $\Pi^m = 500$
   d. $\Pi^m = 600$
   e. Autre

14) Le surplus des consommateurs à l'équilibre est égal à :
   a. $S^m = 10$
   b. $S^m = 250$
   c. $S^m = 1000$
   d. $S^m = 2450$
   e. Autre

15) A l'équilibre du monopole, l'élasticité prix de la demande est égale à :
   a. $\varepsilon^m = -10$
   b. $\varepsilon^m = -\frac{6}{5}$
   c. $\varepsilon^m = -\frac{1}{10}$
   d. $\varepsilon^m = -\frac{6}{125}$
   e. Autre

16) (BONUS) La perte sèche (Dead Weight Loss) générée par le monopole est égale à :
   a. $DWL^m = 0$
   b. $DWL^m = 250$
   c. $DWL^m = 300$
   d. $DWL^m = 810$
   e. Autre

Supposons désormais que ce même cinéma décide de proposer deux tarifs différents : un tarif réduit pour les étudiants (sous présentation d'une carte d'étudiant valide) et un tarif plein pour les autres. Le cinéma parvient à identifier les deux segments de demande : la demande des étudiants (E) est donnée par $D_E(P_E) = 36 - 3P_E$ et la demande des non étudiants (NE) est donnée par $D_{NE}(P_{NE}) = 74 - 2P_{NE}$. Les autres données de l'exercice restent inchangées.

17) Les prix P_E et P_{NE} choisis par le monopole sont :
   a. $P_E = 2$ et $P_{NE} = 2$
   b. $P_E = 7$ et $P_{NE} = \frac{39}{2}$
   c. $P_E = 10$ et $P_{NE} = 23$
   d. $P_E = \frac{32}{3}$ et $P_{NE} = \frac{73}{3}$
   e. Autre

Exercice 2 : (4 points – 25min)

Considérons à présent deux entreprises rationnelles, maximisatrices de profit, qui sont en concurrence sur le marché d'un bien homogène. La variable stratégique est ici la quantité (compétition à la Cournot). Les firmes ne sont pas symétriques d'un point de vue technologique : en effet, la firme A a un coût total de production donné par la fonction $C_A(Q_A) = 8Q_A$ alors que la firme B a un coût total de production donné par la fonction $C_B(Q_B) = 5Q_B$ La demande inverse globale qui s'adresse indifféremment aux deux firmes est donnée par la fonction $P(Q) = 60 - 2Q$ avec $Q = q_A + q_B$.

18) Lorsque les firmes choisissent simultanément les quantités q_A et q_B, l'équilibre de Cournot est donné par :
   a. $q_A^C = \frac{26}{3}$ et $q_B^C = \frac{55}{6}$
   b. $q_A^C = 13$ et $q_B^C = \frac{55}{4}$
   c. $q_A^C = \frac{49}{6}$ et $q_B^C = \frac{29}{3}$
   d. $q_A^C = \frac{26}{3}$ et $q_B^C = \frac{29}{3}$
   e. Autre

Supposons à présent que l'entreprise A choisisse q_A^S en premier (leader de Stackelberg) et que la firme B choisisse q_B^S après avoir observé q_A^S. Les autres données de l'exercice restent inchangées.

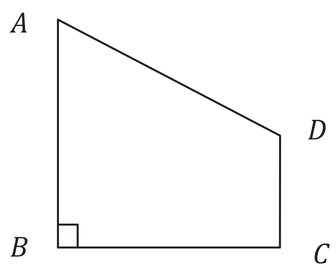
19) L'équilibre de Stackelberg est donné par :
   a. $q_A^S = \frac{26}{4}$ et $q_B^S = \frac{13}{4}$
   b. $q_A^S = \frac{49}{6}$ et $q_B^S = \frac{29}{3}$
   c. $q_A^S = \frac{49}{4}$ et $q_B^S = \frac{61}{8}$
   d. $q_A^S = \frac{49}{6}$ et $q_B^S = \frac{13}{4}$
   e. Autre

Exercice 3 : (3 points – 25 min)

Considérons un modèle d'Hotelling standard. La firme A est localisée en $a = \frac{1}{4}$ et vend le bien au prix p_A, la firme B est localisée en $b = \frac{3}{4}$ et vend le bien au prix p_B. On considère que les firmes sont symétriques d'un point de vue technologique et que leur coût unitaire est nul. Les consommateurs sont répartis uniformément sur le segment $[0, 1]$. Leur demande est unitaire. Le coût unitaire de déplacement est égal à $t = 2$ et la distance est mesurée linéairement. La consommation du bien procure à chaque individu le même niveau d'utilité brute $u = 10$. On suppose que le marché est couvert.

<u>Indice pour la question 20:</u> La structure du modèle est telle que le consommateur indifférent $\tilde{\theta}$ entre acheter à A ou à B se localise entre les deux firmes. Autrement dit : $\tilde{\theta} \in [a, b]$

<u>Indice pour la question 21 :</u> Soit le trapèze $ABCD$ suivant :



$$Aire\ ABCD = \frac{(AB + CD) \times BC}{2}$$

20) À l'équilibre, les prix choisis par les firmes A et B sont donnés par :
   a. $p_A = \frac{9}{2}$ et $p_B = \frac{9}{2}$
   b. $p_A = \frac{9}{2}$ et $p_B = 5$
   c. $p_A = 5$ et $p_B = 2$
   d. $p_A = 2$ et $p_B = 2$
   e. Autre

21) (BONUS) À l'équilibre, le bien être social (défini comme la somme des profits et du surplus des consommateurs) est égal à :
   a. $W = \frac{39}{4}$
   b. $W = \frac{75}{8}$
   c. $W = \frac{15}{8}$
   d. $W = \frac{25}{4}$
   e. Autre

ORGANISATION INDUSTRIELLE - EXAMEN BLANC
CORRECTION

- L3 - Année universitaire 2011/2012 –

PARTIE 1 : QUESTIONS DE COURS

1)

a. **Vrai**
b. **Faux** (On utilise généralement des fonctions d'offre et de demande linéaires pour simplifier les calculs mais on pourrait tout aussi bien raisonner avec des fonctions non linéaires)
c. **Vrai**
d. **Vrai**

2)

a. **Faux** (Le *mark up* est inversement proportionnel à l'élasticité de la demande)
b. **Faux** (Le monopole empêche certaines transactions socialement désirables de se réaliser et génère de fait une perte sèche)
c. **Faux** (Le monopole égalise sa recette MARGINALE à son coût marginal)

3)

a. **Faux** (Les deux biens ne sont pas homogènes)
b. **Faux** (Les deux biens ne sont pas homogènes)
c. **Vrai**

4)

a. **Vrai**
b. **Vrai**
c. **Faux** (Il est impossible en pratique d'appliquer un tarif différent pour chaque consommateur)

5)

a. **Faux** (Rien avoir avec les concepts informationnels de la théorie des jeux. L'information est imparfaite dans le sens où les firmes font face à des consommateurs qui détiennent une information privée.)
b. **Vrai**
c. **Vrai**

6)

a. **Faux** (Les tarifs étudiants, chômeurs, seniors etc. en sont l'exemple.)
b. **Faux** (Favorise au contraire ceux qui ont une élasticité de la demande élevée.)
c. **Faux** (Ne fait pas nécessairement progresser le bien être social. Ce sera le cas seulement si la somme des gains en profit du monopole et en surplus des consommateurs à forte élasticité surpasse les pertes en surplus des consommateurs à faible élasticité.)

7)

- **a. Faux** (L'intégration verticale élimine le problème de la double marge et conduit généralement à un prix de détail plus faible.)
- **b. Vrai**
- **c. Vrai**
- **d. Faux** (La résolution de ce modèle s'apparente à la recherche de la solution d'un jeu SÉQUENTIEL)

8)

- **a. Faux** (Les interactions stratégiques sont telles que la fonction de profit de chaque firme intègre non seulement la quantité qu'elle offre sur le marché mais également celle de son concurrent.)
- **b. Vrai**
- **c. Vrai**
- **d. Faux** (La concurrence à la Cournot est une forme de concurrence « douce » dans laquelle les firmes dégagent des profits strictement positifs contrairement au paradoxe de Bertrand.)

9)

- **a. Faux** (La situation décrite renvoie précisément au paradoxe de Bertrand dans lequel les firmes établissent l'équilibre concurrentiel et font un profit nul.)
- **b. Faux** (Pas nécessairement : seulement si le coût marginal de la firme la moins efficace est strictement supérieur au prix de monopole de la firme la plus efficace.)
- **c. Vrai**
- **d. Faux** (Dès lors que les biens sont différenciés, une firme peut avoir intérêt à augmenter son prix par rapport à celui établi à l'équilibre de Bertrand.)
- **e. Vrai**

10)

- **a. Vrai**
- **b. Faux** (Au contraire, chaque consommateur classe les bien dans un ordre qui lui est propre.)
- **c. Faux** (Est dite verticale si tous les consommateurs effectuent le même classement des biens.)

11)

- **a. Faux** (Pas toujours : uniquement sous l'hypothèse de couverture du marché, d'uniformité de la distribution des consommateurs et de non monopolisation du marché.)
- **b. Vrai**
- **c. Vrai**
- **d. Faux** (La localisation optimale est telle que la distance maximale à parcourir est minimale. Ainsi, on trouve $A = \frac{1}{4}$ et $B = \frac{3}{4}$.)

PARTIE 2 : EXERCICES

Exercice 1 :

12) **b.** $\boldsymbol{P^m = 12}$

Le profit du monopole s'écrit : $\Pi = (110 - 5P)P - 2(110 - 5P) = (110 - 5P)(P - 2)$
Le monopole est *price maker*, il choisit $P^m = \arg\max_{P^m} \Pi = (110 - 5P)(P - 2)$
la condition du premier ordre est telle que :
$\frac{\partial \Pi^m}{\partial P^m} = 0 \leftrightarrow -5(P^m - 2) + (110 - 5P^m) = 0 \leftrightarrow 5(P^m - 2) = 110 - 5P^m \leftrightarrow 10P^m = 120 \leftrightarrow \boxed{P^m = 12}$

13) **c.** $\mathbf{\Pi^m = 500}$

$\Pi^m = (110 - 5P^m)(P^m - 2) = (110 - 5 \times 12)(12 - 2) = 50 \times 10 \leftrightarrow \boxed{\Pi^m = 500}$

14) **b.** $\boldsymbol{S^m = 250}$

Nous savons que $S^m = (prix\ de\ réserve - P^m) \times \frac{Q^m}{2}$

La demande des consommateurs à l'équilibre du monopole est donnée par :
$Q^m = 110 - 5P^m = 110 - 5 \times 12 \leftrightarrow Q^m = 50$

Pour trouver le prix de réserve, nous devons préalablement expliciter la fonction de demande inverse :
$Q = D(P) = 110 - 5P \leftrightarrow 110 - Q = 5P \leftrightarrow P(Q) = 22 - \frac{Q}{5}$. Ainsi le prix de réserve est égal à 22. $S^m = (22 - 12) \times \frac{50}{2} = 10 \times 25 \leftrightarrow \boxed{S^m = 250}$

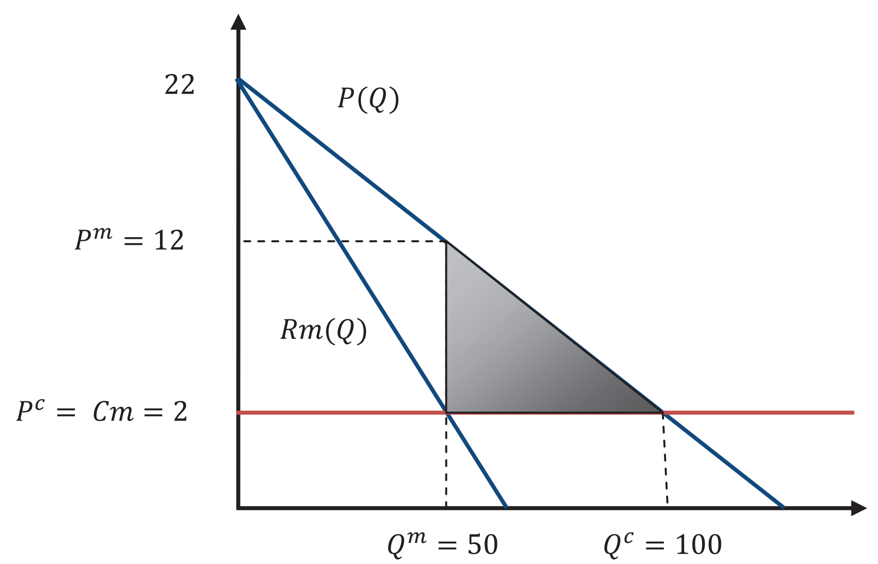
15) **b.** $\boldsymbol{\varepsilon^m = -\frac{6}{5}}$

La fonction d'élasticité prix de la demande est donnée par : $\varepsilon = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial P}{P}} = \frac{\partial D(P)}{\partial P} \times \frac{P}{Q}$
$\frac{\partial D(P)}{\partial P} = \frac{\partial(110-5P)}{\partial P} = -5$. Ainsi, $\varepsilon = -5 \times \frac{P}{Q}$. Ce qui nous mène au résultat :
$\varepsilon^m = -5 \times \frac{P^m}{Q^m} = -5 \times \frac{12}{50} \leftrightarrow \boxed{\varepsilon^m = -\frac{6}{5}}$

16) **b.** $\boldsymbol{DWL^m = 250}$

Nous devons tout d'abord calculer l'équilibre concurrentiel :
$Cm(Q^c) = P(Q^c) \leftrightarrow 2 = 22 - \frac{Q^c}{5} \leftrightarrow Q^c = 100$ et $P^c = 2$
À l'équilibre concurrentiel, la firme réalise un profit nul ($\Pi^c = 0$) et les consommateurs réalisent un surplus égal à : $S^c = (22 - 2) \times \frac{100}{2} = 20 \times 50 = 1000$. Soit un bien être social $W^c = 0 + 1000 = 1000$. En situation de monopole, le bien être social est égal à $W^m = \Pi^m + S^m = 500 + 250 = 750$. La perte sèche (Dead Weight Loss) se mesure comme la différence des biens êtres sociaux : $DWL^m = W^c - W^m = 1000 - 750 \leftrightarrow \boxed{DWL^m = 250}$

<u>Illustration graphique :</u> DWL^m est donné par l'aire du triangle grisé.



17) **b.** $\boldsymbol{P_E = 7}$ **et** $\boldsymbol{P_{NE} = \frac{39}{2}}$

Le profit du monopole discriminant est donné par :

$$\Pi_D = (36 - 3P_E)P_E + (74 - 2P_{NE})P_{NE} - 2(36 - 3P_E + 74 - 2P_{NE}) = 36P_E - 3P_E^2 + 74P_{NE} - 2P_{NE}^2 - 220 + 6P_E + 4P_{NE}$$
$$\leftrightarrow \Pi_D = 42P_E - 3P_E^2 + 78P_{NE} - 2P_{NE}^2 - 220$$

Le monopole discriminant choisit $(P_E, P_{NE}) = \arg\max_{P_E,P_{NE}} \Pi_D = 42P_E - 3P_E^2 + 78P_{NE} - 2P_{NE}^2 - 220$

Les conditions de premier ordre sont telles que :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_E} = 0 \leftrightarrow 42 - 6P_E = 0 \leftrightarrow \boxed{P_E = 7}$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_{NE}} = 0 \leftrightarrow 78 - 4P_{NE} = 0 \leftrightarrow \boxed{P_{NE} = \frac{39}{2}}$$

Exercice 2 :

18) **c.** $\boldsymbol{q_A^C = \frac{49}{6}}$ **et** $\boldsymbol{q_B^C = \frac{29}{3}}$

Chaque firme maximise son profit par rapport à la seule variable de contrôle qui est la quantité qu'elle offre sur le marché.

Le coût unitaire de la forme A est égal à 8 tandis que celui de la firme B est égal à 5. Il vient :

(P_A) : $\max_{q_A} \Pi_A = (60 - 2q_A - 2q_B - 8)q_A$ et (P_B) : $\max_{q_B} \Pi_B = (60 - 2q_A - 2q_B - 5)q_B$

Les conditions de premier ordre donnent :

$$52 - 4q_A - 2q_B = 0 \leftrightarrow q_A^* = \frac{52-2q_B}{4} \leftrightarrow q_A^* = 13 - \frac{q_B}{2} = MR_A(q_B)$$
$$55 - 4q_B - 2q_A = 0 \leftrightarrow q_B^* = \frac{55 - 2q_A}{4} \leftrightarrow q_B^* = \frac{55}{4} - \frac{q_A}{2} = MR_B(q_A)$$

$$q_A^C = MR_A\big(MR_B(q_A)\big) = 13 - (\frac{55}{4} - \frac{q_A^C}{2}) \times \frac{1}{2} = 13 - \frac{55}{8} - \frac{q_A^C}{4} \leftrightarrow \frac{3}{4}q_A^C = \frac{49}{8} \leftrightarrow q_A^C = \frac{49}{8} \times \frac{4}{3} \leftrightarrow \boxed{q_A^C = \frac{49}{6}}$$
$$q_B^C = MR_B\big(q_A^C\big) = MR_B\left(\frac{49}{6}\right) = \frac{55}{4} - \frac{49}{6} \times \frac{1}{2} \leftrightarrow \boxed{q_B^C = \frac{29}{3}}$$

19) **c.** $\boldsymbol{q_A^S = \frac{49}{4}}$ **et** $\boldsymbol{q_B^S = \frac{61}{8}}$

Dans l'équilibre de Stackelberg, le leader (la firme A) choisit la quantité q_A^S qui maximise son profit en anticipant la réaction de B via sa fonction de meilleure réponse :

$$q_B^S = \frac{55}{4} - \frac{q_A^S}{2} = MR_B\big(q_A^S\big)$$
$$(P'_A) : \max_{q_A} \Pi_A = (60 - 2q_A - 2MR_B(q_A) - 8)q_A = (52 - 2q_A - 2 \times (\frac{55}{4} - \frac{q_A}{2}))q_A = \left(\frac{49}{2} - q_A\right)q_A$$

La condition de premier ordre donne :

$$q_A^S = \frac{49}{2} - q_A^S \leftrightarrow \boxed{q_A^S = \frac{49}{4}}$$

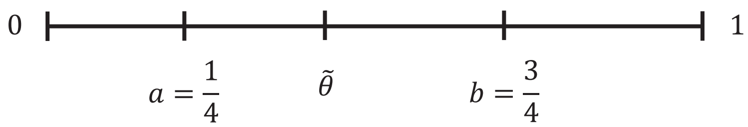
La firme Boffre à l'équilibre de Stackelberg une quantité égale à :

$$q_B^S = \frac{55}{4} - \frac{49}{4} \times \frac{1}{2} \leftrightarrow \boxed{q_B^S = \frac{61}{8}}$$

Exercice 3 :

20) **d.** $\boldsymbol{p_A = 2}$ **et** $\boldsymbol{p_B = 2}$

Grâce au premier indice, on peut établir le schéma suivant :



On commence par chercher la localisation du consommateur $\tilde{\theta}$ indifférent entre acheter à A ou à B :

$$10 - p_A - 2\left(\tilde{\theta} - \frac{1}{4}\right) = 10 - p_B - 2\left(\frac{3}{4} - \tilde{\theta}\right) \leftrightarrow -p_A - 2\tilde{\theta} + \frac{1}{2} = -p_B - \frac{3}{2} + 2\tilde{\theta} \leftrightarrow p_B - p_A + 2 = 4\tilde{\theta}$$
$$\leftrightarrow \tilde{\theta} = \frac{p_B - p_A}{4} + \frac{1}{2}$$

Le marché est couvert, les consommateurs sont distribués uniformément. Ainsi :

$$D_A(p_A, p_B) = \tilde{\theta} = \frac{p_B - p_A}{4} + \frac{1}{2} \text{ et } D_B(p_A, p_B) = 1 - \tilde{\theta} = \frac{1}{2} + \frac{p_A - p_B}{4}$$

Maintenant que le firmes connaissent leurs fonctions de demande respectives, elles vont choisir leurs prix respectifs de telle manière à ce que leur profit soit maximal :

$$(P_A) : \max_{p_A} \Pi_A = \left(\frac{p_B - p_A}{4} + \frac{1}{2}\right) p_A \text{ et } (P_B) : \max_{p_B} \Pi_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{p_A - p_B}{4}\right) p_B$$

Les conditions du premier ordre donnent :

$$\frac{p_A}{4} = \frac{p_B - p_A}{4} + \frac{1}{2} \leftrightarrow p_A = p_B - p_A + 2 \leftrightarrow 2p_A = p_B + 2 \leftrightarrow p_A = 1 + \frac{p_B}{2} = MR_A(p_B)$$
$$\frac{p_B}{4} = \frac{p_A - p_B}{4} + \frac{1}{2} \leftrightarrow p_B = p_A - p_B + 2 \leftrightarrow 2p_B = p_A + 2 \leftrightarrow p_B = 1 + \frac{p_A}{2} = MR_B(p_A)$$

$$p_A = MR_A(MR_B(p_A)) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{p_A}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{p_A}{4} \leftrightarrow \frac{3}{4} p_A = \frac{3}{2} \leftrightarrow p_A = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \leftrightarrow \boxed{p_A = 2}$$
$$p_B = MR_B(p_A) = MR_B(2) = 1 + \frac{2}{2} \leftrightarrow \boxed{p_B = 2}$$

21) **a.** $\boldsymbol{W = \frac{39}{4}}$

Calculons d'abord le profit réalisé par les firmes :

$$D_A(p_A, p_B) = \tilde{\theta} = \frac{p_B - p_A}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2 - 2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$D_B(p_A, p_B) = 1 - \tilde{\theta} = \frac{p_A - p_B}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2 - 2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Pi_A = D_A \times p_A = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

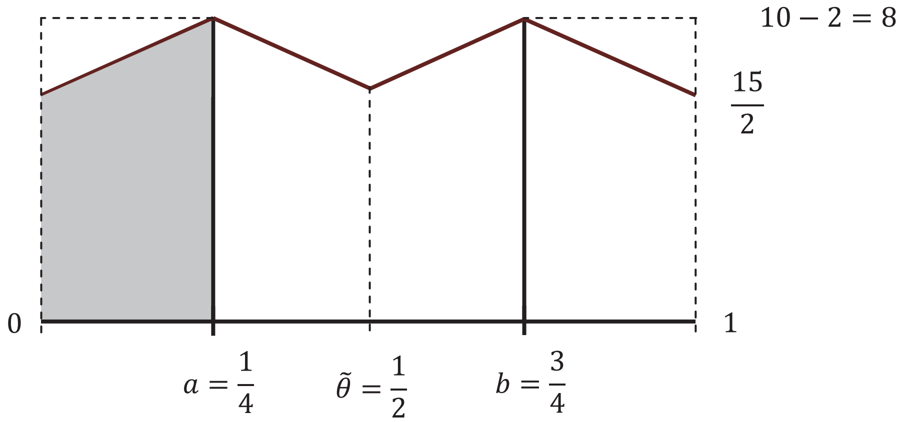
$$\Pi_B = D_B \times p_B = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

Intéressons nous à présent au surplus du consommateur. Pour cela nous avons besoin de calculer la localisation du consommateur indifférent $\tilde{\theta}$ ainsi que l'utilité nette qu'il dégage :

$$\tilde{\theta} = \frac{2 - 2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$U(\tilde{\theta}) = 10 - p_A - 2\left(\tilde{\theta} - \frac{1}{4}\right) = 10 - p_B - 2\left(\frac{3}{4} - \tilde{\theta}\right)$$
$$U(1/2) = 10 - 2 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 10 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

Les fonctions représentées sur le graphique ci-dessous sont des fonctions d'utilité nettes. Ainsi, le surplus des consommateurs correspond à 4 fois l'aire grisée car les 4 trapèzes sont symétriques. Nous pouvons donc résoudre le problème graphiquement. Notons qu'on pourrait parvenir au résultat en faisant appel au calcul intégral.



En utilisant l'indice 2, le surplus total des consommateurs est donc égal à :
$$S = 4 \times \left(\frac{15}{2} + 8\right) \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4} + \frac{8}{2} \leftrightarrow S = \frac{31}{4}$$

Nous pouvons enfin exprimer le bien être social :
$$W = \Pi_A + \Pi_B + S = 1 + 1 + \frac{31}{4} \leftrightarrow \boxed{W = \frac{39}{4}}$$

Sylvain Hours
10/12/2011

ORGANISATION INDUSTRIELLE - EXAMEN BLANC

- L3 - Année universitaire 2012/2013 -

INSTRUCTIONS :

- Vous avez **2h** pour répondre à l'ensemble des exercices suivants.
- Aucun document n'est autorisé hormis les dictionnaires de langue pour les étudiants non-francophones.
- Les calculatrices non-programmables sont autorisées.
- L'énoncé est constitué de **3 pages**. Assurez-vous que celui-ci est complet.
- Le barème ainsi que l'estimation du temps à consacrer à chaque exercice ne sont donnés qu'à titre indicatif.
- Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
- Merci d'écrire **LISIBLEMENT**.

Bon courage !

Remarques préliminaires : *Pour l'ensemble des exercices suivants, les agents sont supposés être rationnels. Sauf indication contraire, les consommateurs cherchent à maximiser leur utilité tandis que les firmes ont pour objectif la maximisation de leur profit. Le bien-être social est défini comme étant la simple somme du profit des firmes et du surplus des consommateurs.*

Exercice 1 (20min – 4 points) :

1) *Rappelez quelles stratégies (prix choisis par chacun des joueurs) constituent l'unique équilibre de Nash du modèle de base de Bertrand et expliquez pourquoi celui-ci est souvent qualifié de paradoxe.*
2) *En quoi l'introduction de contraintes de capacité, d'une différentiation des produits ou encore d'une répétition infinie des interactions stratégiques peut expliquer que l'équilibre du modèle de base de Bertrand n'est que rarement observé en pratique? Détaillez votre réponse.*

Exercice 2 (20min – 4 points) :

La firme « Secure Homes » propose aux particuliers fortunés d'acheter des abris souterrains à même de les protéger de toutes formes de cataclysmes. On suppose que cette firme est en situation de monopole.

Sachant que sa fonction de coût total est donnée par $C(Q) = 2Q$ et qu'à l'équilibre du monopole la valeur absolue de l'élasticité de la fonction de demande est égale à $|\varepsilon^m| = 2$:

1) *Rappelez et commentez la condition d'équilibre du monopole en faisant apparaître l'indice de Lerner.*
2) *Quel est le prix de monopole p^m choisi par la firme ?*

Sachant que la fonction de demande $D(p)$ est linéaire, décroissante et de coefficient directeur (pente) égal à -2 :

3) *Quelles sont les quantités q^m écoulées sur le marché à l'équilibre du monopole?*
4) *Déterminez l'équation de la fonction de demande $D(p)$.*
5) *Calculez la perte de bien-être social DWL^m (Dead Weight Loss) générée par le pouvoir de marché de la firme.*

Exercice 3 (40min – 6 points) :

Dans un petit village de Lozère, il y'a deux garagistes spécialisés dans la réparation de tracteurs : Régis (R) et José (J). Ils sont en concurrence par les quantités. Les deux garagistes ne sont pas aussi efficaces l'un que l'autre : une réparation coûte 4€ à Régis alors qu'elle ne coûte que 2€ à José. On considère que le service offert est homogène. La demande qui s'adresse aux garagistes est donnée par la fonction de demande inverse $P(Q) = 10 - Q$ avec $Q = q_R + q_J$. On suppose que Régis et José choisissent simultanément les quantités qu'ils souhaitent offrir sur le marché.

1) *Quel est le modèle de concurrence considéré ?*
2) *Déterminez les quantités optimales q_R^* et q_J^*. Commentez.*
3) *Déterminez le profit réalisé par chacun des garagistes (Π_R^*, Π_J^*), le surplus des consommateurs (S^*) ainsi que le bien-être social (W^*) (arrondissez vos résultats à deux chiffres après la virgule). Commentez.*

Régis est menacé de faillite. Il a besoin de 2€ pour réaliser les investissements nécessaires au maintien de son activité. S'il ne trouve pas l'argent, José se retrouvera en situation de monopole. Le syndicat des propriétaires de tracteurs (l'ensemble des consommateurs) organise une réunion pour déterminer s'il vaut mieux accepter la monopolisation du marché ou verser la somme de 2€ à Régis afin de sauver son activité et ainsi de préserver un minimum de concurrence sur le marché. S'ils décidaient de venir en aide à Régis, ces propriétaires prélèveraient cette somme sur le surplus (supposé être mesuré en euros) réalisé à l'équilibre du duopole.

4) *Les propriétaires de tracteurs (représenté par le syndicat) vont-ils verser la somme de 2€ à Régis ou vont-ils préférer le laisser faire faillite ?*
5) *Le maire du village est supposé défendre l'intérêt général (maximiser le bien-être social). Serait-il d'accord avec la décision du syndicat ? Commentez.*

Exercice 4 (40min – 6 points) :

L'UMP (Union pour un Mouvement Populaire) souhaite élire son nouveau président. Il n'y a que deux candidats en lice : François Fillon et Jean-François Copé. Seuls les adhérents du parti ont le droit de vote. Pour être adhérent, les sympathisants (citoyens se sentant proches des valeurs de l'UMP sans être nécessairement adhérents) doivent payer une cotisation de $p = 2$€. Ces sympathisants sont supposés être distribués uniformément sur le segment $[0,1]$, rendant ainsi compte d'une certaine hétérogénéité idéologique. Les adhérents (sympathisants ayant payé leur cotisation) peuvent :

- Voter pour François Fillon
- Voter pour Jean-François Copé
- Ne pas voter

Le fait d'aller voter confère à chaque adhérent une utilité brute de $u = 10$ (satisfaction d'avoir fait entendre sa voix). Le fait de ne pas voter n'affecte pas l'utilité de l'adhérent. L'utilité de réserve des sympathisants (utilité dégagée s'ils choisissent de ne pas payer la cotisation et ainsi de ne pas devenir adhérent) est normalisée à zéro : $u^R = 0$. Les sympathisants cherchent à maximiser leur utilité nette.

Les adhérents qui souhaitent voter ne pouvant choisir qu'entre deux candidats, ils doivent pour la plupart voter pour un programme politique (ou plus directement un candidat) qui ne correspond pas exactement à leurs convictions personnelles. De ce fait, ces adhérents subissent des coûts de transport. La distance est mesurée de manière linéaire et le coût unitaire de transport est donné par $t = 4$.

Chacun des deux candidats doit choisir sa localisation sur le segment (définir son programme politique) de manière à maximiser la part des électeurs votant pour eux. Fillon est localisé en $F \in [0,1]$ et Copé en $C \in [0,1]$. De nombreux observateurs (notamment des journalistes politiques) estiment que le programme de François Fillon est plus à gauche que celui de Jean-François Copé. Nous supposerons donc que $F \leq C$ (Fillon est localisé à gauche de Copé sur le segment des sympathisants de l'UMP). En cas de localisation identique ($F = C$), on suppose que la moitié des adhérents vote pour François Fillon et que l'autre moitié vote pour Jean-François Copé.

Le vainqueur est le candidat qui rassemble plus de la moitié des suffrages exprimés.

Nous supposerons enfin que les dépenses de campagne (coût de production d'un nouveau président du parti) sont identiques pour chacun des candidats et par souci de simplicité, nous normaliserons ces coûts à zéro.

1) *Rappelez brièvement ce qui distingue la différentiation horizontale de la différentiation verticale. À quel type de différentiation a-t-on affaire ici ?*
2) *Tous les sympathisants vont-ils payer la cotisation afin de devenir adhérents ? Est-il possible qu'un adhérent choisisse de ne pas voter ? Justifiez.*
3) *Est-il possible qu'un des deux candidats monopolise le marché (que l'ensemble des adhérents choisisse de voter pour le même candidat) ? Que pouvez-vous en déduire à propos de la localisation du sympathisant indifférent ?*
4) *Déterminez la localisation du sympathisant indifférent entre Copé et Fillon et déduisez en les demandes (intentions de vote) qui s'adressent à chaque candidat.*
5) *Rappelez brièvement ce qu'est un équilibre de Nash puis, sans réaliser de calculs, déterminez les localisations F et C qui constituent l'unique équilibre de Nash du jeu (détaillez votre raisonnement et commentez le résultat en faisant apparaitre les notions de différentiation minimale et de différentiation maximale).*
6) *Déduisez-en le résultat de l'élection.*

ORGANISATION INDUSTRIELLE - EXAMEN BLANC

- L3 - Année universitaire 2012/2013 -

EXEMPLE DE CORRECTION

EXERCICE 1 :

1) Dans le modèle de base de Bertrand, deux firmes se partagent le marché d'un produit homogène. La concurrence se fait par les prix. La demande des consommateurs s'adresse à la firme offrant le produit au prix le plus bas. En cas d'égalité, celle-ci se répartit équitablement entre les deux firmes. Elles sont symétriques d'un point de vue technologique et leur coût marginal de production est supposé être constant. L'interaction stratégique n'est pas répétée (jeu en un coup). On suppose enfin que les capacités de production de chaque firme sont illimitées. Dans ce modèle, l'unique équilibre de Nash consiste, pour les deux firmes, à tarifer au coût marginal ($p_A = p_B = c$) et ainsi à réaliser des profits nuls.

   Ce résultat peut être qualifié de paradoxe pour deux raisons principales : la première est théorique. Elle consiste à observer que malgré le nombre très limité de firmes en concurrence (seulement 2), celles-ci répliquent l'équilibre de concurrence pure et parfaite dans lequel il est supposé y avoir atomicité de l'offre. Le second argument est empirique. Il consiste à observer que la prédiction du modèle de base de Bertrand ne semble pas se vérifier en pratique : les faits infirment bien souvent l'idée d'une concurrence aussi rude au sein du marché si concentré.

2) Si l'on introduit des contraintes de capacité alors le couple de stratégies $p_A = p_B = c$ dans lequel les deux firmes réalisent des profits nuls peut ne plus être un équilibre de Nash. En effet, si l'on suppose par exemple que la firme A ne peut pas offrir sur le marché une quantité plus importante que $K_A < D(c)$, alors la firme B a intérêt à dévier en choisissant par exemple $p_B = c + \varepsilon$. La firme A ne pouvant pas servir toute la demande $D(c)$ lui étant adressée lorsque $p_B > p_A = c$, une partie de celle-ci va se reporter sur la firme B qui devient l'unique offreur à même de servir la demande résiduelle. La firme B réalise donc des profits strictement positifs, la déviation est effectivement profitable.

   Si l'on considère que les produits sont différenciés (qualité, localisation, réputation…), la consommation de l'un ne va pas générer que le même niveau d'utilité brute (avant déduction du paiement) que la consommation de l'autre. Ainsi, certains consommateurs vont être prêts à payer plus cher pour un produit s'ils jugent que le différentiel d'utilité dégagé excède le différentiel de prix affiché. Dans ce cas, la demande ne s'adresse plus exclusivement à la firme offrant le produit au prix le plus bas. Si l'on suppose par exemple que les consommateurs perçoivent le produit de la firme A comme étant de meilleure qualité (différentiation verticale), alors une déviation vers $p_A = c + \varepsilon$ est profitable dans la mesure où certains consommateurs vont préférer acheter le produit de meilleure qualité malgré son prix plus élevé. Ils vont ainsi permettre à la firme A de dégager des profits strictement positifs.

   La répétition INFINIE des interactions permet de faire apparaitre des équilibres de Nash du jeu répété autres que la simple réplication de l'équilibre de Nash du jeu en un coup. L'idée sous-jacente à ce résultat (que l'on appelle Folk Theorem en théorie des jeux) est que les répétitions permettent aux joueurs de réagir au résultat des interactions passées. Dans le cadre d'une concurrence à la Bertrand, les deux firmes sont condamnées à réaliser des profits nuls à chaque période si elles répliquent perpétuellement l'équilibre de Nash du jeu en un coup. Pour faire progresser leurs profits, elles peuvent tenter de s'entendre (équilibre collusif) de manière à choisir un prix de vente identique et strictement supérieur à leur coût marginal ($p_A = p_B > c$). Les deux firmes se partagent alors la demande équitablement et dégagent, à chaque période, des profits strictement positifs. Un tel arrangement serait impossible dans le cadre d'un jeu en un coup étant donné que chacune des firmes aurait intérêt à dévier à la baisse pour s'accaparer toute la demande. Pourtant, dans un jeu répété un nombre infini de fois (si le nombre de répétitions est fini, ce résultat n'est plus valable), l'incitation à dévier peut être anéantie par la crainte de représailles lors des interactions futures. En effet, une déviation a beau pouvoir augmenter le paiement du joueur par rapport à l'équilibre collusif (entente entre les joueurs) à l'étape au cours de laquelle la déviation a lieu, les autres joueurs auront la possibilité de punir le joueur déviant lors des étapes futures du jeu et ainsi le condamner à réaliser des paiements moindres que ceux atteints à l'équilibre collusif. Chaque joueur arbitre ainsi entre coût et bénéfices d'une déviation et lorsque les bénéfices surpassent les coûts, l'équilibre collusif est un équilibre de Nash du jeu répété.

EXERCICE 2 :

1) La fonction de profit du monopole s'écrit $\Pi(p) = pD(p) - C\big(D(p)\big)$. La firme rationnelle cherchant à la maximiser résout l'équation $\frac{\partial \Pi(p)}{\partial p} = 0 \iff D(p^m) + p^m \frac{\partial D(p)}{\partial p} - \frac{\partial C(D(p))}{\partial D(p)} \frac{\partial D(p)}{\partial p} = 0$ (Notez qu'il faudrait préciser que les dérivées sont évaluées à l'équilibre du monopole, par souci de lisibilité je me permets de manquer quelque peu de rigueur). Puisque $D(p) = q$, $\frac{\partial C(D(p))}{\partial D(p)}$ peut aussi être écrit $\frac{\partial C(q)}{\partial q}$ et correspond à la fonction de coût marginal que l'on notera Cm. La condition de maximisation du profit peut donc s'écrire $\frac{\partial D(p)}{\partial p}(p^m - Cm) = -D(p^m) \Leftrightarrow \frac{\partial D(p)}{\partial p} \frac{(p^m - Cm)}{p^m} = -\frac{D(p^m)}{p^m} \Leftrightarrow \frac{(p^m - Cm)}{p^m} = -\frac{D(p^m)}{p^m} \frac{\partial p}{\partial D(p)}$. Le terme de droite correspond (au signe près) à l'inverse de la valeur de l'élasticité de la demande à l'équilibre du monopole : $\varepsilon^m = \frac{\frac{\partial D(p)}{D(p)}}{\frac{\partial p}{p}} = \frac{\partial D(p)}{D(p)} \frac{p}{\partial p} = \frac{\partial D(p)}{\partial p} \frac{p^m}{D(p^m)}$. Ceci nous amène à l'écriture de la règle de tarification du monopole : $\boxed{\frac{(p^m - Cm)}{p^m} = \frac{1}{|\varepsilon^m|}}$

   Cette règle met en exergue le fait que plus la demande est élastique et plus le monopole pourra user de son pouvoir de marché afin de réaliser des profits importants. En effet, le terme de gauche, aussi appelé indice de Lerner, est une mesure du *mark-up* de la firme et celui-ci croit de manière inversement proportionnelle avec l'élasticité de la demande. En d'autres termes, plus la demande est captive (rigide) et plus le monopole peut abuser de sa position dominante alors que plus la demande est fuyante (élastique) et moins le monopole peut tirer profit de son pouvoir de marché. Dans le cas extrême d'une élasticité tendant vers l'infini ($|\varepsilon^m| \to +\infty$), cette condition d'équilibre nous indique très clairement qu'il est alors optimal pour la firme de tarifer au coût marginal et ainsi de se comporter comme si elle était en situation de concurrence pure et parfaite ($p^m \to Cm$).

2) La méthode de résolution généralement utilisée pour résoudre le problème du monopole n'est pas utilisable dans le cas présent. En effet, aucune fonction de demande n'est explicitée. En revanche, nous disposons de la fonction de coût total $C(Q) = 2Q$ qui nous permet de déduire la fonction de coût marginal : $Cm(Q) = \frac{\delta C(Q)}{\delta Q} = 2$. Le monopole étant rationnel et cherchant à maximiser son profit, la condition d'optimalité $\frac{(p^m - Cm)}{p^m} = \frac{1}{|\varepsilon^m|}$ doit être nécessairement vérifiée à l'équilibre. En y substituant les données à notre disposition, il vient $\frac{(p^m - 2)}{p^m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{p^m = 4}$

3) Nous savons désormais que $\frac{\delta D(p)}{\delta p} = -2$. Puisque $|\varepsilon^m| = \left|\frac{\delta D(p)}{\delta p} \frac{p^m}{D(p^m)}\right| = 2$ et $p^m = 4$, il vient alors $\left|-2 \frac{4}{D(p^m)}\right| = 2$ soit encore $\frac{8}{D(p^m)} = 2 \Leftrightarrow \boxed{D(p^m) = 4}$

4) La fonction de demande étant linéaire, son équation sera de la forme $D(p) = a - 2p$ avec $a > 0$. Nous savons que le point $(p^m = 4, q^m = 4)$ appartient à cette droite. La relation $4 = a - 2 \times 4$ doit ainsi être vérifiée et nous permet de déterminer que $a = 12$. Ainsi, la fonction de demande a pour équation $\boxed{D(p) = 12 - 2p}$

5) À l'équilibre du monopole, la firme réalise un profit $\Pi^m = (4 - 2) \times 4 = 8$. Pour calculer le surplus du consommateur, il faut en premier lieu déterminer le prix de réserve (le prix p^R tel que $D(p^R) = 0$). On résout donc $12 - 2p^R = 0 \Leftrightarrow p^R = 6$. Le surplus du consommateur S^m est ainsi égal à $(6 - 4) \times 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow S^m = 4$. Le bien-être social $W^m = S^m + \Pi^m$ est donc égal à $W^m = 4 + 8 = 12$. À l'équilibre concurrentiel, la firme choisit d'offrir la quantité qui égalise son coût marginal au prix (recette moyenne). D'après la fonction de demande $D(p)$ il est aisé de tirer la fonction de demande inverse $p(q) = 6 - \frac{q}{2}$. Le coût marginal est ici égal à $Cm = 2$. Il nous suffit alors de résoudre l'équation $6 - \frac{q^c}{2} = 2$ afin de déterminer les quantités écoulées sur le marché à l'équilibre concurrentiel. Il vient $q^c = 8$. La firme tarifant au coût marginal et celui-ci étant constant, elle réalise des profits nuls. Le bien-être social coïncide avec le surplus des consommateurs qui est égal à $S^c = (6 - 2) \times 8 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow S^c = 16$. On a donc $W^c = 16$. La perte de bien-être liée au pouvoir de marché de la firme (DWL^m) est donc égale à la différence $W^c - W^m$. Ainsi, $DWL^m = 16 - 12 \Leftrightarrow \boxed{DWL^m = 4}$

EXERCICE 3 :

1) Nous sommes dans le cadre d'un modèle de concurrence à la Cournot : il y a un nombre limité de firmes en concurrence, la variable stratégique est ici la quantité, les deux firmes déterminent simultanément les quantités qu'ils souhaitent offrir sur le marché.

2) La résolution d'un modèle de duopole de Cournot consiste à déterminer l'équilibre de Nash d'un jeu simultané. Les joueurs sont Régis et José. Chacun des joueurs doit fixer la quantité qu'il souhaite offrir sur le marché. Il faut bien entendu que ces quantités soient telles que le prix de marché soit au moins égal au coût unitaire de chaque joueur. Autrement dit, il faut que $P(Q) = 10 - q_R - q_J \geq 4$ pour Régis et que $P(Q) = 10 - q_R - q_J \geq 2$ pour José. Si l'on considère, pour chacun des garagistes, le cas le plus avantageux dans lequel le concurrent offre une quantité nulle, ces conditions se réécrivent : $P(Q) = 10 - q_R \geq 4$ pour Régis et $P(Q) = 10 - q_J \geq 2$ pour José. Cela nous permet donc d'écrire les ensembles d'actions (ou de stratégies dans le cas particulier de cet exercice puisque les joueurs ne réalisent qu'une action) pour chacun des joueurs : $A_R = [0{,}6]$ et $A_J = [0{,}8]$. José et Régis cherchent à maximiser leur profit. Celui de Régis s'écrit $\Pi_R(q_R, q_J) = q_R(10 - q_J - q_R - 4)$ quant à celui de José, il s'écrit $\Pi_J(q_R, q_J) = q_J(10 - q_J - q_R - 2)$. L'information est complète mais imparfaite car les deux joueurs doivent déterminer q_R et q_J en même temps (jeu simultané). L'équilibre de Nash de ce jeu est un couple de stratégies (q_R^*, q_J^*) tel qu'aucun des deux joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement. Concrètement, dans le cadre de notre exercice, cet équilibre se trouve en cherchant l'intersection des fonctions de meilleures réponses. Pour obtenir ces fonctions (aussi appelées fonctions de réaction dans le contexte d'un duopole de Cournot), il suffit d'annuler la dérivée première du profit de chacun des garagistes par rapport à la quantité qu'il offre sur le marché et d'exprimer cette dernière variable en fonction de la quantité offerte sur le marché par son concurrent. Commençons par Régis : $\frac{\partial \Pi_R(q_R, q_J)}{\partial q_R} = 0 \Leftrightarrow 6 - q_J - 2q_R = 0 \Leftrightarrow q_R = 3 - \frac{q_J}{2} : MR_R(q_J)$. Poursuivons avec José : $\frac{\partial \Pi_J(q_R, q_J)}{\partial q_J} = 0 \Leftrightarrow 8 - q_R - 2q_J = 0 \Leftrightarrow q_J = 4 - \frac{q_R}{2} : MR_J(q_R)$. Pour déterminer le couple de stratégies (q_R^*, q_J^*) qui constitue l'équilibre de Nash de ce jeu, il suffit de résoudre le système d'équation à deux inconnues constitué des deux fonctions de meilleures réponses. Résolvons par substitution en remplaçant q_J par $4 - \frac{q_R}{2}$ dans $MR_R(q_J)$: $q_R^* = 3 - \frac{(4 - \frac{q_R^*}{2})}{2} \Leftrightarrow q_R^* = \frac{4}{3}$. En remplaçant q_R par q_R^* dans $MR_J(q_R)$, il vient $q_J^* = 4 - \frac{(\frac{4}{3})}{2} \Leftrightarrow q_J^* = \frac{10}{3}$. L'équilibre de Nash du jeu de Cournot est donc donné par le couple de stratégies $\boxed{(q_R^* = \frac{4}{3}, q_J^* = \frac{10}{3}).}$ On observe que c'est le garagiste le plus efficace qui offre la quantité la plus importante sur le marché.

3) Pour connaître le profit réalisé par chaque garagiste, il faut d'abord calculer le prix de marché. Pour ce faire, on substitue simplement les quantités vendues à l'équilibre de Nash dans la fonction de demande inverse avec $Q^* = q_J^* + q_R^* = \frac{14}{3}$. Ainsi : $p^* = P(Q^*) = 10 - \frac{14}{3} \approx 5{,}33€$. Il devient désormais aisé de calculer le profit réalisé par Régis et José : $\Pi_R^* = (5{,}33 - 4) \times \frac{4}{3} \Leftrightarrow \boxed{\Pi_R^* \approx 1{,}78}$ et $\Pi_J^* = (5{,}33 - 2) \times \frac{10}{3} \Leftrightarrow \boxed{\Pi_R^* \approx 11{,}11.}$ Sans surprise, c'est le garagiste le plus efficace qui dégage les profits les plus importants.

   Le surplus des consommateurs correspond à la somme infinitésimal des différences qui séparent la disposition à payer de chaque consommateur du prix de marché et ce pour l'ensemble des transactions réalisées à l'équilibre : $S^* = (10 - 5{,}33) \times \frac{14}{3} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{S^* \approx 10{,}89.}$

   Le bien-être social se calcule comme la somme du surplus des consommateurs et des profits réalisés par chacun des deux garagistes : $W^* = S^* + \Pi_R^* + \Pi_J^* \Leftrightarrow W^* = 10{,}89 + 1{,}78 + 11{,}11 \Leftrightarrow \boxed{W^* \approx 23{,}78.}$

4) Si le syndicat ne verse pas l'argent, José se trouvera en situation de monopole. Cherchons l'équilibre de ce monopole. José maximise la fonction $\Pi_J(q_J) = q_J(10 - q_J - 2)$. $\frac{\partial \Pi_J(q_J)}{\partial q_J} = 0 \Leftrightarrow 8 - 2q_J^m = 0 \Leftrightarrow q_J^m = 4$. Le prix de marché devient alors $p^m = 10 - q_J^m = 10 - 4 \Leftrightarrow p^m = 6$. La monopolisation du marché conduit bien entendu à une réduction des quantités offertes et à une augmentation du prix à l'équilibre. Le surplus des consommateurs va donc nécessairement se contracter : $S^m = (10 - 6) \times 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow S^m = 8 < 10{,}89$. Ainsi, la monopolisation du marché conduit à une réduction du surplus des consommateurs égale à $S^* - S^m \approx 10{,}89 - 8 \approx 2{,}89$. Puisque l'on a supposé que le surplus des consommateurs était exprimé en euros, il est clair que les consommateurs préfèrent payer 2€ afin de maintenir de la concurrence sur le marché

plutôt que de laisser José en situation de monopole. Ils dégagent ainsi un surplus net égal à $S_n^* \approx 10{,}89 - 2 \approx 8{,}89$ alors qu'ils ne dégageraient qu'un surplus égale à $S^m = 8$ s'ils laissaient Régis faire faillite.

5) Qu'en dirait le décideur public soucieux de l'ensemble de la collectivité (firmes et consommateurs) ? Le bien-être social à l'équilibre de Cournot est donné par à $W^* \approx 23{,}78$. À l'équilibre du monopole, José réalise un profit $\Pi_J^m = (6-2) \times 4 = 16$. Ainsi, le bien-être social à l'équilibre du monopole est égal à $W^m = S^m + \Pi_J^m = 8 + 16 = 24 > W^*$. Le maire est en désaccord avec la décision du syndicat : il préfère que le marché soit monopolisé par José. Ce désaccord provient du fait que le syndicat ignore que la monopolisation du marché permet à José de réaliser à lui seul un profit plus important que la somme des profits de Régis et lui-même à l'équilibre du duopole. Le maire, lui, arbitre entre la perte de surplus et le gain de profit et dans ce cas précis, il s'avère que la monopolisation du marché fait progresser le bien-être social. La décision du syndicat est donc optimale pour les consommateurs mais dommageable du point de vue de la collectivité dans son ensemble.

<u>EXERCICE 4 :</u>

1) Dans le cadre de la différentiation horizontale, le classement entre les différents produits (ordre de préférence) dépend des goûts des consommateurs : certains préfèrent par exemple les glaces à la vanille, d'autres au chocolat. Le classement des produits est SUBJECTIF. Dans le cadre de la différentiation verticale, l'ordre de préférence est unanime : à moins de surveiller sa ligne ou d'avoir un appétit de moineau, on peut supposer que tous les consommateurs préfèrent une glace à deux boules plutôt qu'à une seule. Le classement des biens est OBJECTIF. Dans le cas présent, il n'y a clairement pas d'ordre de préférence objectif : il n'existe pas de candidat unanimement perçu comme étant « meilleur » que l'autre (l'élection n'aurait d'ailleurs aucun sens le cas échéant). L'ordre de classement dépend bien des goûts (convictions politiques) des sympathisants : on a donc affaire à une DIFFERENTIATION HORIZONTALE.

2) Si les sympathisants ne paient pas leur cotisation, ils ne peuvent donc pas voter et leur utilité est celle de réserve : $u^R = 0$. La question est de savoir si le fait de payer la cotisation permet à l'ensemble des sympathisants de dégager une utilité supérieure à celle de réserve. Le coût de transport maximal est égal à 4 ($t \times 1$) : c'est en effet le coût de transport que devra subir le sympathisant situé à une extrémité du segment s'il choisissait de voter pour un candidat situé à l'autre extrémité du segment. Ainsi, l'utilité nette minimale dégagée par un sympathisant ayant choisi de payer la cotisation et de voter est égale à $u^n = u - p - t \times 1 = 10 - 2 - 4 \Leftrightarrow u^n = 4 > u^R$. Bien entendu, aucun sympathisant choisira de payer la cotisation mais de ne pas voter : en effet, cette stratégie conduirait l'adhérent à réaliser une utilité nette égale à $u^A = -p \Leftrightarrow u^A = -2 < u^R$. Il vaudrait alors mieux ne pas adhérer au parti. En conséquence, tous les adhérents vont voter. Ainsi, quelque soit la localisation des candidats sur le segment $[0{,}1]$, il est toujours préférable pour l'ensemble des sympathisants de payer la cotisation et de voter plutôt que choisir de ne pas devenir adhérent et renoncer au droit de vote. Ce résultat nous indique que le marché est couvert.

3) Non c'est impossible. Il arrive dans les modèles de différentiation horizontale qu'une des firmes puisse monopoliser le marché lorsque le différentiel d'efficacité (de coût) est très important. Dans ce cas, la firme la plus efficace peut proposer son produit à un prix plus bas que son concurrent. Lorsque le différentiel de prix est substantiel, il est possible que même les consommateurs très éloignés (et plus proches du concurrent) choisissent de subir des coûts de transport important afin de payer un prix moins important. Si l'ensemble des consommateurs choisit le produit de la firme la plus efficace, alors le marché est monopolisé. Dans le cas présent, il n'y a pas de différentiel de prix de vente (le montant de la cotisation est fixé de manière exogène et est identique quelque soit le candidat choisi par l'adhérent). Le marché sera donc partagé entre les deux candidats.La conséquence directe de ce résultat est que le sympathisant indifférent se situera au milieu des deux candidats : $\tilde{\theta} \in [F, C]$.

4) Le sympathisant indifférent est celui qui dégage la même utilité nette qu'il vote pour Copé ou pour Fillon. Puisque $\tilde{\theta} \in [F, C]$, la recherche du sympathisant indifférent revient à résoudre l'équation $u - p - t(\tilde{\theta} - F) = u - p - t(C - \tilde{\theta})$ soit encore $10 - 2 - 4(\tilde{\theta} - F) = 10 - 2 - 4(C - \tilde{\theta})$. Il vient : $\boxed{\tilde{\theta}(F, C) = \frac{F+C}{2}}$. On observe bien que quelque soient les localisations de Copé et Fillon, $\tilde{\theta} \in [0{,}1]$. Il y a donc bien absence de monopolisation du marché puisque le seul cas pour lequel le consommateur indifférent peut se situer à une extrémité du segment est celui où les deux candidats choisissent la même localisation et nous avions fait l'hypothèse que dans ce cas, les sympathisants se divisaient équitablement entre les deux candidats.

Du fait du résultat de couverture du marché, la demande (intentions de vote) s'adressant à Fillon est constituée de l'ensemble des consommateurs situés à gauche du sympathisant indifférent. La demande s'adressant à Copé est constitué de l'ensemble des consommateurs situés à droite du sympathisant indifférent. Du fait de l'hypothèse d'uniformité distributionnelle des sympathisants, il vient : $D^F(F,C) = \tilde{\theta} \Leftrightarrow \boxed{D^F(F,C) = \frac{F+C}{2}}$ tandis que $D^C(F,C) = 1 - \tilde{\theta} \Leftrightarrow \boxed{D^C(F,C) = 1 - \frac{F+C}{2}}$. On remarque naturellement que la demande qui s'adresse à chacun des candidats est fonction de la localisation des deux candidats (interactions stratégiques puisque absence de monopolisation).

5) Un équilibre de Nash est un vecteur de stratégies tel qu'aucun des joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement. Autrement dit, le vecteur de stratégies (s_i^*, s_{-i}^*) est un équilibre de Nash si et seulement si $\forall i, \forall s_i : u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$.

De par l'expression des fonctions de demande, on observe que les deux candidats sont incités à se rapprocher l'un de l'autre. En effet, la demande de Fillon s'accroît à mesure qu'il se déplace vers la droite du segment : $\frac{\partial D^F(F,C)}{\partial F} = \frac{1}{2} > 0$. En revanche, la demande s'adressant à Copé s'accroît à mesure qu'il se déplace vers la gauche du segment : $\frac{\partial D^C(F,C)}{\partial C} = -\frac{1}{2} < 0$. Il est tentant de vouloir conclure que Copé choisirait de se localiser à l'extrémité gauche du segment et que Fillon se positionnerait à l'extrémité droite. Pourtant, la contrainte $F \leq C$ doit être vérifiée. Les deux candidats semblent vouloir se rapprocher le plus l'un de l'autre (proposer un programme politique similaire) jusqu'à la saturation de la contrainte $F \leq C$. En l'occurrence, tout équilibre de Nash sera tel que $F = C$. Pour s'en convaincre, supposons que $F < C$. Alors, les deux candidats auraient un intérêt à dévier unilatéralement : Copé en se déplaçant vers la gauche et Fillon en se déplaçant vers la droite. Ce n'est donc pas un équilibre de Nash. Pourtant, toutes les stratégies telles que $F = C$ ne sont pas des équilibres de Nash. Imaginons par exemple que $C = F < \frac{1}{2}$. Dans ce cas, chacun des candidats se partage la moitié de la demande. Fillon n'a aucun intérêt à dévier vers la gauche (cela réduirait la demande qui s'adresse à lui) et ne peut pas se déporter sur la droite de Copé. Cependant, Copé a clairement un intérêt à se déplacer vers la droite de manière à accaparer les trois quarts de la demande et remporter l'élection. Dans le cas symétrique où $F = C > \frac{1}{2}$, c'est Fillon qui a un intérêt à dévier unilatéralement vers la gauche pour accaparer les trois quarts de la demande. Ces couples des stratégies ne sont donc pas des équilibres de Nash. En revanche, pour $F = C = \frac{1}{2}$, les deux candidats se partagent la moitié de la demande. Fillon n'a pas intérêt à se déplacer vers la gauche, pas plus que Copé vers la droite. Le couple de stratégies $(F = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2})$ est donc bien l'unique équilibre de Nash du jeu.

À cet équilibre, toute forme de différentiation a disparu, les programmes politiques des deux candidats sont identiques et situés au milieu du segment des sympathisants. C'est le principe de DIFFERENTIATION MINIMALE. Ce résultat n'est en rien une surprise. En effet, dans les modèles plus classiques, les firmes doivent déterminer leur localisation mais également leur prix de vente. Deux effets contradictoires jouent alors : la firme qui différencie son produit (s'éloigner de son concurrent) rigidifie la demande qui s'adresse à elle (forme de pouvoir de marché du fait de la substituabilité imparfaite). En conséquence, elle peut pratiquer des prix plus élevés et réaliser plus de profit. Pourtant, les firmes sont également incitées à se déplacer vers l'intérieur du segment de manière à accaparer une part de marché plus importante quitte à accepter une différentiation moindre et donc une pression concurrentielle accrue qui tire les prix vers le bas. Ces deux effets contradictoires peuvent alternativement mener à des équilibres dits de différentiation minimale et de différentiation maximale. Dans le cas de la différentiation minimale, l'incitation à accaparer une part importante de la demande supplante l'incitation à différencier le produit. Dans le cas de la différentiation maximale, c'est au contraire l'incitation à différencier le produit qui domine l'incitation à se localiser de manière à servir une part importante de la demande. Dans notre exercice, le prix de vente (prix de la cotisation) est exogène. Ainsi, il n'existe aucune incitation pour les candidats à différencier leur programme politique. Leur seule préoccupation est de maximiser leurs intentions de vote et c'est cela qui les conduit à choisir une localisation identique au milieu du segment des sympathisants.

6) Les deux candidats ayant choisi une localisation identique, ils sont homogènes du point de vue des sympathisants. D'après la règle évoquée dans l'énoncé, chacun reçoit très exactement la moitié des suffrages. Aucun des candidats ne remporte l'élection, celle-ci n'a donc pas permis à l'UMP de désigner son nouveau président !

Sylvain Hours
(29/11/2012)

ORGANISATION INDUSTRIELLE - EXAMEN BLANC

- L3 - Année universitaire 2013/2014 -

INSTRUCTIONS :

- Vous avez **1h30** pour répondre à la question de cours et à l'exercice suivants.
- Le sujet est composé de **2 pages**, assurez-vous que celui-ci est complet.
- Aucun document n'est autorisé en dehors des dictionnaires de langue pour les étudiants non francophones. Les calculatrices non programmables sont autorisées.
- En ce qui concerne la question de cours, vos arguments devront être présentés de manière claire et cohérente. Tous les concepts auxquels votre réponse fera référence se devront d'être définis.
- En ce qui concerne l'exercice, **COMMENTEZ VOS RÉSULTATS** dès que vous estimez qu'il est pertinent de le faire. Inutile de détailler les calculs sur votre copie : contentez-vous de poser les conditions initiales et donnez directement la solution. On supposera que tous les agents sont rationnels et que leur objectif est de maximiser leur profit/utilité.
- Le barème ainsi que l'allocation temporelle ne sont donnés qu'à titre indicatif. Notez notamment que le barème est sujet à modification.
- Merci d'écrire **LISIBLEMENT**.

Bon courage !

QUESTION DE COURS (10 points – 45min) :

Du point de vue du bien-être social, une discrimination de troisième type est-elle préférable à un prix uniforme ?

EXERCICE (10 points – 45min) :

L'entreprise « Oxytech » (O) produit un unique modèle de cigarettes électroniques qu'elle distribue ensuite dans ses propres magasins. On supposera qu'elle est en situation de monopole. Le coût marginal de production d'une cigarette électronique est égal à 10€ $(c = 10)$. Il n'y a pas de coûts fixes (la fonction de coût total est donc linéaire). Toutes les unités produites sont de même qualité (on supposera plus généralement que le bien est homogène). La fonction de demande inverse en cigarettes électroniques est donnée par $P(Q) = a - Q$.

1) *Sachant qu'à l'équilibre du monopole, la valeur absolue de l'élasticité de la demande $|\varepsilon^m|$ est égale à 3 $(|\varepsilon^m| = 3)$, déterminez le prix d'équilibre du monopole P^m. Déduisez-en la valeur prise par le paramètre a. Enfin, déterminez la quantité de cigarettes électroniques Q^m échangée sur le marché à l'équilibre du monopole.*
2) *Calculez le profit Π^m réalisé par l'entreprise « Oxytech », le surplus des consommateurs S^m ainsi que le bien-être social $W^m = \Pi^m + S^m$ à l'équilibre du monopole.*

Craignant que la vente libre des cigarettes électroniques de la firme « Oxytech » banalise la consommation d'un produit dont les effets sur la santé sont encore imparfaitement connus, le gouvernement décide que seules les pharmacies seront habilitées à le distribuer. Ainsi, l'entreprise « Oxytech » ne pourra plus commercialiser ses cigarettes électroniques dans ses propres magasins. Elle devra désormais vendre sa production au prix unitaire et uniforme ω sur le marché de gros auprès des pharmacies qui distribueront alors le produit auprès des consommateurs sur le marché de détail. Il existe deux pharmacies : « Anagram » (A) et « Carpenter » (C). On supposera que le coût de distribution est nul et que ces deux pharmacies sont en concurrence à la Cournot sur le marché de détail. Ces derniers choisissent donc les quantités q_C et q_A à offrir sur ce marché. La demande en cigarettes électroniques demeure inchangée par rapport à la première partie de l'exercice. Ainsi, $P(Q) = a - Q$ (où a prend la valeur calculée précédemment). Puisque $Q = q_A + q_C$ et que le bien est homogène, alors la demande inverse peut s'écrire $P(q_C, q_A) = a - q_A - q_C$.

3) *Représentez graphiquement la chaîne verticale décrite par cet énoncé.*
4) *Pour ω donné, déterminez l'équilibre de Cournot* (q_C^*, q_A^*).
5) *Déterminez le prix de gros unitaire ω^* choisi par la firme « Oxytech ». Déduisez-en la quantité totale de cigarettes électroniques échangée sur le marché ($Q^* = q_A^* + q_C^*$), le prix de détail (P^*), le profit réalisé par chacune des entreprises ($\Pi_O^*, \Pi_A^*, \Pi_C^*$), le surplus des consommateurs (S^*) ainsi que le bien-être social ($W^* = S^* + \Pi_O^* + \Pi_A^* + \Pi_C^*$) à l'équilibre du modèle.*
6) *Comparez et commentez vos résultats aux questions 2) et 5).*

ORGANISATION INDUSTRIELLE - EXAMEN BLANC

- L3 - Année universitaire 2013/2014 –

EXEMPLE DE CORRECTION

INSTRUCTIONS :

- Vous avez **1h30** pour répondre à la question de cours et à l'exercice suivants.
- Le sujet est composé de **2 pages**, assurez-vous que celui-ci est complet.
- Aucun document n'est autorisé en dehors des dictionnaires de langue pour les étudiants non francophones. Les calculatrices non programmables sont autorisées.
- En ce qui concerne la question de cours, vos arguments devront être présentés de manière claire et cohérente. Tous les concepts auxquels votre réponse fera référence se devront d'être définis.
- En ce qui concerne l'exercice, **COMMENTEZ VOS RÉSULTATS** dès que vous estimez qu'il est pertinent de le faire. Inutile de détailler les calculs sur votre copie : contentez-vous de poser les conditions initiales et donnez directement la solution. On supposera que tous les agents sont rationnels et que leur objectif est de maximiser leur profit/utilité.
- Le barème ainsi que l'allocation temporelle ne sont donnés qu'à titre indicatif. Notez notamment que le barème est sujet à modification.
- Merci d'écrire **LISIBLEMENT**.

Bon courage !

QUESTION DE COURS (10 points – 45min) :

Du point de vue du bien-être social, une discrimination de troisième type est-elle préférable à un prix uniforme ?

La discrimination par les prix est une pratique tarifaire qui consiste à vendre le même bien à des prix différents en fonction des spécificités des consommateurs. C'est une pratique légale qui permet à la firme d'augmenter son profit par rapport à une tarification uniforme.

Pigou a distingué trois types de discrimination. La discrimination de premier type (ou discrimination parfaite) consiste à appliquer un prix différent pour chaque consommateur de manière à extraire la totalité de son surplus. C'est une solution économiquement efficace bien qu'inégalitaire en termes redistributifs mais un tel degré de personnalisation tarifaire est rendue impossible tant par la quantité d'information qu'il faudrait mobiliser que par la faisabilité et l'acceptabilité de cet extrémisme discriminatoire.

La discrimination de second type apporte une solution aux situations dans lesquelles les firmes savent qu'il existe différents types de consommateurs mais qu'elles n'ont aucun moyen de les identifier formellement. Elles construisent alors un menu pour chaque type de consommateur en s'assurant que chaque consommateur choisira de contractualiser (contrainte de participation) et sélectionnera effectivement le menu correspondant à son type (contrainte d'incitation). Ce mécanisme n'extrait le surplus du consommateur qu'imparfaitement puisque la firme devra concéder une rente informationnelle à certains types de consommateurs afin que leurs choix révèlent avec justesse leur information privée. Dans ce contexte, les besoins informationnels se limitent à la connaissance des spécificités des différents types ainsi que leur distribution parmi les consommateurs.

La discrimination de troisième degré suppose que la firme est capable de décomposer la demande globale qui s'adresse à elle en un nombre fini de groupes de consommateurs homogènes de par leurs spécificités. De plus, celle-ci est capable d'identifier formellement les consommateurs, il n'y a ici pas de possibilité d'arbitrage. La firme peut alors proposer un prix pour chaque segment de demande. Puisque ces segments sont étanches, tout se passe comme si le monopole se déclinait en autant de petits monopoles qu'il y a de segments de demande. Ainsi, la règle de tarification sur chaque segment relie inversement l'élasticité de la demande au mark-up de la firme. Autrement dit, plus la demande sera rigide (resp. élastique) et plus le prix sera élevé (resp. faible). L'idée sous-jacente est simple : lorsque la demande est élastique, une variation du prix entraine une réponse forte de la demande. Ainsi, une réduction du prix de vente implique une diminution du mark-up mais celle-ci est largement compensée par l'augmentation des quantités vendues. *A contrario*, lorsque la demande est rigide, une variation du prix entraine une faible réponse de la demande. Ainsi, une augmentation du prix de vente engendre une faible diminution des quantités qui est largement compensée par la progression du mark-up.

Pour mieux comprendre ce qui va suivre, prenons l'exemple d'une demande globale que l'on peut décomposer en deux groupes : une sous-demande élastique et une sous demande rigide. Avec une tarification uniforme, le prix de marché rendra compte des caractéristiques de la demande globale, autrement dit, des caractéristiques « moyennes » des deux segments de demande. La demande globale sera alors identifiée comme étant « moyennement » élastique et le prix de marché uniforme sera fixé à un niveau « intermédiaire ». Avec une tarification discriminante, le monopole pourra choisir un prix pour chaque segment de demande de manière à prendre en compte avec davantage de précision les spécificités de chacun de ces groupes de consommateurs. En l'occurrence, conformément à la règle d'équilibre du monopole, il appliquera un prix plus faible que le prix uniforme sur le segment élastique et un prix plus élevé que le prix uniforme sur le segment rigide. Naturellement, le profit du monopole sera plus important avec la tarification discriminante puisqu'il peut extraire avec davantage de vigueur le surplus des consommateurs. De même, le surplus des consommateurs du groupe élastique est plus important avec la tarification discriminante puisque le prix auquel ils font face est plus faible que celui auquel ils auraient fait face en cas de tarification uniforme. C'est le contraire pour les consommateurs du groupe rigide, ils payent un prix discriminant plus élevé que le prix uniforme, leur surplus est moindre.

Au final, quel est l'impact de la discrimination de troisième type sur le bien-être social que l'on définira ici comme la somme simple du profit et du surplus des consommateurs. La réponse est équivoque. La discrimination peut stimuler le bien-être social tout comme le réduire. Si le gain de profit du monopole ainsi que le gain de surplus des consommateurs du groupe élastique surpassent la perte de surplus du groupe de consommateurs rigides, alors la discrimination fait progresser le bien-être social. Dans le cas contraire, la discrimination dégrade au bien-être social. Il faudrait s'intéresser à la forme des fonctions de demande et de coût pour pouvoir distinguer les cas dans lesquels le régulateur devrait encourager une telle pratique tarifaire des cas dans lesquels une tarification uniforme est préférable.

EXERCICE (10 points – 45min) :

L'entreprise « Oxytech » (O) produit un unique modèle de cigarettes électroniques qu'elle distribue ensuite dans ses propres magasins. On supposera qu'elle est en situation de monopole. Le coût marginal de production d'une cigarette électronique est égal à 10€ $(c = 10)$. Il n'y a pas de coûts fixes (la fonction de coût total est donc linéaire). Toutes les unités produites sont de même qualité (on supposera plus généralement que le bien est homogène). La fonction de demande inverse en cigarettes électroniques est donnée par $P(Q) = a - Q$.

1) *Sachant qu'à l'équilibre du monopole, la valeur absolue de l'élasticité de la demande* $|\varepsilon^m|$ *est égale à* 3 $(|\varepsilon^m| = 3)$*, déterminez le prix d'équilibre du monopole* P^m*. Déduisez-en la valeur*

prise par le paramètre a. Enfin, déterminez la quantité de cigarettes électroniques Q^m échangée sur le marché à l'équilibre du monopole.

À l'équilibre du monopole, l'indice de Lerner doit être égal à l'inverse de la valeur absolue de l'élasticité de la demande : $\frac{P^m - c}{P^m} = \frac{1}{|\varepsilon^m|}$. Puisque $c = 10$ et $|\varepsilon^m| = 3$, on sait qu'à l'équilibre, $\frac{P^m - 10}{P^m} = \frac{1}{3}$. On en déduit que :

$$\boxed{P^m = 15}$$

De plus, $P(Q) = A - Q$ implique que $P^m = A - Q^m$. Donc, $15 = A - Q^m \Leftrightarrow Q^m = A - 15$. À l'équilibre du monopole, la recette marginale doit égaliser le coût marginal. La recette marginale est la dérivée de la recette totale. La recette totale $RT(Q) = P(Q)Q$. Ainsi, $RT(Q) = (A - Q)Q = AQ - Q^2$. D'où $Rm(Q) = \frac{\partial RT(Q)}{\partial Q} = A - 2Q$. À l'équilibre, $A - 2Q^m = 10 \Leftrightarrow A - 2(A - 15) = 10$. Ainsi,

$$\boxed{A = 20}$$

Enfin, puisque $Q^m = A - 15$

$$\boxed{Q^m = 5}$$

2) *Calculez le profit Π^m réalisé par l'entreprise « Oxytech », le surplus des consommateurs S^m ainsi que le bien-être social $W^m = \Pi^m + S^m$ à l'équilibre du monopole.*

Le profit réalisé par la firme « Oxytech » est égal à la différence entre les recettes et les coûts à l'équilibre du monopole : $\Pi^m = P^m Q^m - cQ^m = Q^m(P^m - c)$. Notez bien que cette écriture du profit n'est valide que lorsque la fonction de coût total est linéaire (et non pas affine). Ainsi, $\Pi^m = 5(15 - 10)$. Enfin,

$$\boxed{\Pi^m = 25}$$

Le surplus des consommateurs correspond à la somme infinitésimale des différences entre les dispositions maximales à payer et le prix de marché. Évalué à l'équilibre du monopole, et puisque la fonction de demande est affine : $S^m = \frac{(A - P^m)Q^m}{2} = \frac{(20-15)5}{2}$. D'où,

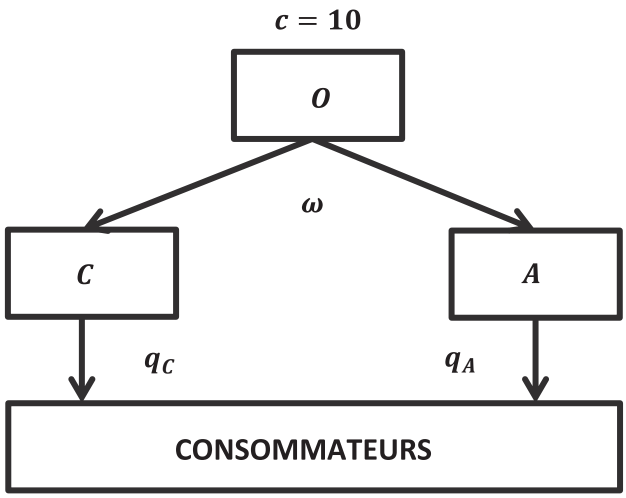
$$\boxed{S^m = \frac{25}{2}}$$

Le bien-être social est ici défini comme la somme simple du profit du monopole et du surplus des consommateurs à l'équilibre du modèle. Ainsi, $W^m = 25 + \frac{25}{2}$. D'où,

$$\boxed{W^m = \frac{75}{2}}$$

Craignant que la vente libre des cigarettes électroniques de la firme « Oxytech » banalise la consommation d'un produit dont les effets sur la santé sont encore imparfaitement connus, le gouvernement décide que seules les pharmacies seront habilitées à le distribuer. Ainsi, l'entreprise « Oxytech » ne pourra plus commercialiser ses cigarettes électroniques dans ses propres magasins. Elle devra désormais vendre sa production au prix unitaire et uniforme ω sur le marché de gros auprès des pharmacies qui distribueront alors le produit auprès des consommateurs sur le marché de détail. Il existe deux pharmacies : « Anagram » (A) et « Carpenter » (C). On supposera que le coût de distribution est nul et que ces deux pharmacies sont en concurrence à la Cournot sur le marché de détail. Ces derniers choisissent donc les quantités q_C et q_A à offrir sur ce marché. La demande en cigarettes électroniques demeure inchangée par rapport à la première partie de l'exercice. Ainsi, $P(Q) = a - Q$ (où a prend la valeur calculée précédemment). Puisque $Q = q_A + q_C$ et que le bien est homogène, alors la demande inverse peut s'écrire $P(q_C, q_A) = a - q_A - q_C$.

3) Représentez graphiquement la chaîne verticale décrite par cet énoncé.



$$P(q_A, q_C) = 20 - q_A - q_C$$

4) Pour ω donné, déterminez l'équilibre de Cournot (q_C^*, q_A^*).

Le modèle de relation verticale auquel nous avons affaire est un jeu séquentiel à information parfaite. La méthode de résolution retenue est la récurrence amont. C'est pourquoi, en toute logique, on s'intéresse en premier lieu à la dernière étape du jeu, à savoir la concurrence à la Cournot entre les pharmacies pour ω donné.

Le profit de C s'écrit

$$\Pi_C(q_A, q_C) = q_c(20 - q_C - q_A - \omega)$$

Le profit de A s'écrit

$$\Pi_A(q_A, q_C) = q_A(20 - q_C - q_A - \omega)$$

L'équilibre de Nash du jeu de Cournot est donné par la solution au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \Pi_C(q_A, q_C)}{\partial q_C}\right|_{q_C = q_C^*} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \Pi_A(q_A, q_C)}{\partial q_A}\right|_{q_A = q_A^*} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20 - 2q_C^* - q_A^* - \omega = 0 \\ 20 - q_C^* - 2q_A^* - \omega = 0 \end{cases}$$

D'où les fonctions de meilleures réponses :

$$\begin{cases} q_C^*(q_A^*) = 10 - \dfrac{q_A^* + \omega}{2} \\ q_A^*(q_C^*) = 10 - \dfrac{q_C^* + \omega}{2} \end{cases}$$

Et enfin l'équilibre de Cournot :

$$\boxed{q_C^* = q_A^* = \frac{20-\omega}{3}}$$

$$Q^* = q_C^* + q_A^* \Leftrightarrow Q^* = \frac{40 - 2\omega}{3}$$

5) *Déterminez le prix de gros unitaire ω^* choisi par la firme « Oxytech ». Déduisez-en la quantité totale de cigarettes électroniques échangée sur le marché ($Q^* = q_A^* + q_C^*$), le prix de détail (P^*), le profit réalisé par chacune des entreprises ($\Pi_O^*, \Pi_A^*, \Pi_C^*$), le surplus des consommateurs (S^*) ainsi que le bien-être social ($W^* = S^* + \Pi_O^* + \Pi_A^* + \Pi_C^*$) à l'équilibre du modèle.*

Ayant maintenant résolu la dernière étape du jeu, on remonte à la précédente :

Le profit de la firme « Oxytech » s'écrit

$$\Pi_O(\omega) = (\omega - 10)Q^* \Leftrightarrow \Pi_O(\omega) = (\omega - 10)\frac{40 - 2\omega}{3}$$

Il est maximum si

$$\left.\frac{\partial \Pi_O(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega^*} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega^* = 15}$$

Ainsi,

$$\boxed{q_C^* = q_A^* = \frac{5}{3}}$$

$$\boxed{Q^* = \frac{10}{3}}$$

$$\boxed{P^* = \frac{50}{3}}$$

$$\boxed{\Pi_O^* = \frac{50}{3}}$$

$$\boxed{\Pi_C^* = \Pi_A^* = \frac{25}{9}}$$

$$\boxed{S^* = \frac{50}{9}}$$

$$\boxed{W^* = \frac{250}{9}}$$

6) Comparez et commentez vos résultats aux questions 2) et 5).

La désintégration verticale à laquelle conduit la décision du gouvernement engendre un phénomène de double marginalisation : sur le marché de détail, l'offre est duopolistique. On est bien loin du paradigme de concurrence pure et parfaite. À l'équilibre de Cournot, le prix de marché s'établit au-dessus du coût marginal (le prix de gros). Les pharmacies réalisent donc une marge. En amont, le producteur est en position de leader de Stackelberg, il va vendre son produit sur le marché de gros en réalisant une marge strictement positive. En conséquence, le prix de détail est plus élevé lorsque producteur et distributeurs sont dissociés : $P^* > P^m$. En effet, l'intégration verticale élimine le phénomène de la double marge et conduit à un prix de détail plus bas. Cela implique naturellement que les quantités échangées sur le marché sont plus faibles $Q^* < Q^m$, que le surplus des consommateurs diminue $S^* < S^m$. Le profit de la chaîne verticale est nécessairement inférieur au profit de la structure intégrée puisque ce-dernier est maximal $\Pi_O^* + \Pi_A^* + \Pi_C^* < \Pi^m$. Ainsi, le bien-être social est plus important lorsque le producteur peut servir directement les consommateurs : $W^* < W^m$.

Par ailleurs, il est important de rappeler que la mise en œuvre de restrictions verticales telles qu'une tarification binôme ou qu'un prix de revente imposé pourraient permettre de corriger le problème de la double marginalisation.

Notez enfin que cet exercice ne spécifie ni la manière dont les cigarettes électroniques affectent la santé des consommateurs ni l'impact de la décision gouvernementale sur les préférences de ces derniers. Cette présentation très épurée rend la résolution de l'exercice aisée mais ne permet pas de juger de l'efficacité de la politique de régulation mise en œuvre.

Examen d'Organisation Industrielle

Licence 3 - 1ère session - Décembre 2013
Université Montpellier 1 - Faculté d'Économie

Instructions :

- Vous avez 2h pour répondre à la question de cours et à l'exercice suivants.
- Aucun document n'est autorisé en dehors des dictionnaires de langue pour les étudiants non-francophones. Les calculatrices non programmables sont autorisées.
- En ce qui concerne la question de cours, vos arguments devront être présentés de manière claire et cohérente. Tous les concepts auxquels votre réponse fera référence se devront d'être définis.
- En ce qui concerne l'exercice, COMMENTEZ VOS RÉSULTATS dès que vous estimez qu'il est pertinent de le faire. Inutile de détailler les calculs sur votre copie : contentez-vous de poser les conditions initiales et donnez directement la solution. On supposera que tous les agents sont rationnels et que leur objectif est de maximiser leur profit/utilité.
- Le barème ainsi que l'allocation temporelle ne sont donnés qu'à titre indicatif. Notez que le barème est sujet à modification.
- Merci d'écrire LISIBLEMENT.

Bon courage !

Question de cours *[8pts - 45min]* :

Le problème de la double marge : origines, conséquences et solutions

Exercice *[12pts - 1h15min]* :

Considérons un continuum de consommateurs distribués uniformément sur un intervalle $[0, 1]$. La firme A, localisée en $a = 0$, est en situation de monopole et produit, au coût unitaire $c_A > 0$, un bien dont la consommation procure un niveau d'utilité brut $u > 0$. L'entreprise vend son produit au prix unitaire p_A. Les consommateurs subissent un coût de déplacement unitaire égal à $t > 0$. La distance est mesurée linéairement. Si le consommateur localisé en $\theta \in [0, 1]$ choisit d'acheter le bien, son niveau d'utilité final est donc égal à $U_\theta = u - p_A - t\theta$. S'il choisit de ne pas acheter le bien, son niveau d'utlité final est supposé être nul.

1. *[2pts]* Déterminez la fonction de demande $D(p_A)$ s'adressant au monopole.
2. *[2pts]* Déterminez le prix de monopole p_A^m qui permet à l'entreprise A de maximiser son profit. Déduisez-en $D(p_A^m)$, le volume de bien échangé sur le marché à l'équilibre du monopole.
3. *[2pts]* Déterminez le seuil $\underline{u}$ au-delà duquel le marché sera couvert à l'équilibre du monopole.

Supposons désormais que l'entreprise B entre sur le marché et admettons qu'elle soit localisée en $b = 1$. Les deux firmes produisent le même bien, elles se différencient par leur localisation sur l'intervalle. Disposant de moins d'expérience que sa rivale, l'entreprise B est technologiquement moins efficace que l'entreprise A. En l'occurrence, on supposera que son coût de production unitaire est égal à $c_B > c_A$. Enfin, on notera p_B le prix de vente unitaire du produit de la firme B.

4. *[2pts]* En supposant que le marché soit couvert, déterminez la demande s'adressant à chacune des deux entreprises.
5. *[2pts]* Déterminez les prix de duopole p_A^d et p_B^d choisis simultanément par les deux firmes.
6. *[2pts]* Soit $\Delta c = c_B - c_A$ le différentiel d'efficacité technologique séparant les deux entreprises. Déterminez le seuil $\underline{\Delta c}$ au-delà duquel le marché sera monopolisé par l'entreprise A à l'équilibre du duopole.

Examen d'Organisation Industrielle

Licence 3 - 1ère session - Décembre 2013
Université Montpellier 1 - Faculté d'Économie

Instructions :

- Vous avez 2h pour répondre à la question de cours et à l'exercice suivants.
- Aucun document n'est autorisé.
- En ce qui concerne la question de cours, vos arguments devront être présentés de manière claire et cohérente. Tous les concepts auxquels votre réponse fera référence se devront d'être définis.
- En ce qui concerne l'exercice, COMMENTEZ VOS RÉSULTATS dès que vous estimez qu'il est pertinent de le faire. On supposera que tous les agents sont rationnels et que leur objectif est de maximiser leur profit/utilité.
- Merci d'écrire LISIBLEMENT.

Bon courage !

Question de cours :

Définir le problème de la double marge et expliquer comment y remédier.

Solution

« Qu'est ce qui est pire qu'un monopole? Une chaîne de monopoles ». Cette citation célèbre illustre à merveille la problématique de la double marge dans les modèles de relations verticales.

On entend par relations verticales une situation dans laquelle un producteur en situation de monopole et un distributeur contractualisent sur le marché de gros tandis que le distributeur et les consommateurs interagissent sur le marché de détail. On ainsi affaire à une chaîne de production dans laquelle chaque élément est une entité indépendante (exemples : agriculteurs, industrie pétrolière, pierres précieuses). Autrement dit, le produit final requiert les compétences de multiples firmes qui vont successivement acheter le produit et le revendre à l'élément lui succédant dans la chaîne de production après lui avoir appliqué son domaine de compétences. Ainsi, à mesure que l'on progresse dans la chaîne de production (que le produit se rapproche de ses caractéristiques finales), chaque élément de la chaine verticale vendra le bien intermédiaire plus cher que ce qu'il l'a acheté pour ainsi dégager une marge. En effet, chaque firme étant en situation de monopole, elle peut donc tarifer au dessus du coût marginal. Au final, le consommateur subira les marges successives appliquées par chacun des maillons de la chaîne verticale En conséquence, son surplus sera faible puisque le prix final sera élevé. C'est en ça que la double marginalisation est un problème. Plus il va y avoir d'éléments dans la chaîne verticale et plus le prix de vente sera élevé. Ainsi à mesure que les structures verticales se complexifient, on s'éloigne de plus en plus de l'optimum de premier rang puisque chaque monopole va engendrer une perte sèche qui vont s'additionner.

En réalité le problème de la double marge est un problème d'externalité : les éléments en aval de la chaîne de production ne prennent pas en compte le fait que la baisse de leur prix de revente entrainerait une augmentation du profit des entités en amont de la chaîne. Les solutions à ce problème consistent donc à internaliser cet effet externe.

Quelles sont les solutions à ce problème? Une première consiste simplement à pratiquer une intégration verticale. En effet, producteur et distributeur ne faisant qu'un, une seule marge est répercutée sur le consommateurs. On parle alors de structure intégrée.

Une seconde solution consiste à mettre en oeuvre des restrictions verticales. Une restriction verticale est une forme de contractualisation plus sophistiquée que la simple tarification linéaire qui va permettre de restaurer l'efficacité d'une structure intégrée lorsque les éléments de la chaine verticale demeurent dissociés. On n'évoquera ici que deux formes de restrictions verticales : les contrats de franchise (tarification binôme) et le prix de revente imposé.

En ce qui concerne la tarification binôme, supposons d'abord que le producteur puisse déterminer les termes du contrat (il dispose du pouvoir de négociation). La partie fixe de la tarification va permettre au producteur de confisquer la totalité du profit du distributeur. Ainsi, le producteur va choisir le prix variable le plus faible possible (coût marginal de production) de manière à permettre au distributeur de maximiser son profit pour ensuite le lui confisquer. Il cherche à maximiser la taille du gâteau pour ensuite le prendre tout entier. Le problème de la double marge est ainsi éliminé puisque le producteur ne prend pas de marge (il vend au coût marginal). À l'équilibre du modèle, le prix final sera le prix de monopole, le profit du distributeur sera nul, celui du producteur sera égal au profit du monopole, on retrouve précisément le résultat de la structure intégrée.

De manière triviale, si le distributeur pouvait déterminer les termes du contrat, il choisirent une partie fixe égale à zéro et la prix variable égal au coût marginal. Pour les mêmes raisons, le problème de la double marge est éliminé car le producteur ne prend pas de marge, on retrouve les mêmes résultats hormis le fait que le profit est désormais entièrement capté par le distributeur.

En ce qui concerne le prix de revente imposé, cette pratique consiste à obliger le distributeur à vendre le produit à un prix préalablement déterminé par le producteur. Ainsi, le producteur va obliger le distributeur à vendre son produit au prix où il l'a acheté, en l'occurrence le prix de monopole. Ainsi le distributeur ne fera aucune marge, son profit sera nul (entièrement confisqué par le producteur) et on retrouve bien le résultat de la structure intégrée.

Exercice :

Considérons un continuum de consommateurs distribués uniformément sur un intervalle $[0, 1]$. La firme A, localisée en $a = 0$, est en situation de monopole et produit, au coût unitaire $c_A > 0$, un bien dont la consommation procure un niveau d'utilité brut $u > 0$. L'entreprise vend son produit au prix unitaire p_A. Les consommateurs subissent un coût de déplacement unitaire égal à $t > 0$. La distance est mesurée linéairement. Si le consommateur localisé en $\theta \in [0, 1]$ choisit d'acheter le bien, son niveau d'utilité final est donc égal à $U_\theta = u - p_A - t\theta$. S'il choisit de ne pas acheter le bien, son niveau d'utlité final est supposé être nul.

1. Déterminez la fonction de demande $D(p_A)$ s'adressant au monopole.

Solution 1 $D(p_A) = \frac{u-p_A}{t}$

2. Déterminez le prix de monopole p_A^m qui permet à l'entreprise A de maximiser son profit. Déduisez-en $D(p_A^m)$, le volume de bien échangé sur le marché à l'équilibre du monopole.

Solution 2 $p_A^m = \frac{u+c_A}{2}, D(p_A^m) = \frac{u-c_A}{2t}$

3. Déterminez le seuil $\underline{u}$ au-delà duquel le marché sera couvert à l'équilibre du monopole.

Solution 3 $\underline{u} = 2t + c_A$

Supposons désormais que l'entreprise B entre sur le marché et admettons qu'elle soit localisée en $b = 1$. Les deux firmes produisent le même bien, elles se différencient par leur localisation sur l'intervalle. Disposant de moins d'expérience que sa rivale, l'entreprise B est technologiquement moins efficace que l'entreprise A. En l'occurrence, on supposera que son coût de production unitaire est égal à $c_B > c_A$. Enfin, on notera p_B le prix de vente unitaire du produit de la firme B.

4. En supposant que le marché soit couvert, déterminez la demande s'adressant à chacune des deux entreprises.

Solution 4 $D_A(p_A, p_B) = \frac{1}{2} + \frac{p_B-p_A}{2t}$, $D_B(p_A, p_B) = \frac{1}{2} + \frac{p_A-p_B}{2t}$

5. Déterminez les prix de duopole p_A^d et p_B^d choisis simultanément par les deux firmes.

Solution 5 $MR_A(p_B) = \frac{t+p_B+c_A}{2}$, $MR_B(p_A) = \frac{t+p_A+c_B}{2}$, $(p_A^d, p_B^d) = (t + \frac{2c_A+c_B}{3}, t + \frac{2c_B+c_A}{3})$

6. Soit $\Delta c = c_B - c_A$ le différentiel d'efficacité technologique séparant les deux entreprises. Déterminez le seuil $\underline{\Delta c}$ au-delà duquel le marché sera monopolisé par l'entreprise A à l'équilibre du duopole.

Solution 6 $D_A(p_A^d, p_B^d) = \frac{1}{2} + \frac{\Delta c}{6t} \geq 1 \Longleftrightarrow \underline{\Delta c} = 3t$

EXEMPLES DE CORRECTION DE QUELQUES QUESTIONS DE COURS

Chapitre 1 : Le pouvoir du monopole vient de la demande, commentez cette affirmation.

Les divers modèles de monopole se rapportent à une structure de marché dont l'équilibre résulte mécaniquement du comportement de maximisation d’un offreur unique supposé rationnel offrant un bien homogène à une multitude de demandeurs.

Mais contrairement aux firmes en situation de « Concurrence Pure et Parfaite » qui sont « preneuses de prix » le Monopoleur est « price-maker » : il fixe le prix du produit et ainsi, dès lors que la demande qui s’adresse à lui est donnée, le volume des échanges de façon à maximiser son profit total.

Les modèles théoriques étudient le monopole « pur » (ou « absolu »), c'est-à-dire la situation abstraite de firmes ne subissant aucune « concurrence », ni directe, ni indirecte, ni potentielle. Les conditions d’existence d’un monopole « pur » sont :

H1 : Unicité de l’offreur et atomicité de la demande.

H2 : Nullité de l'élasticité-croisée de la demande du bien produit par le monopoleur, par rapport au prix de tous les autres biens, c’est-à-dire, pas de substituts (absence de concurrence effective directe ou indirecte).

H3 : Barrières infranchissables à l'entrée (absence de concurrence potentielle, absence de « mobilité » des facteurs).

Le profit du monopole est maximal lorsque sa recette marginale est égale à son coût marginal :

$$Rm(q^m) = Cm(q^m)$$

On peut également montrer qu’à l’équilibre du monopole, l’indice de Lerner est égal à l’inverse de l’élasticité de la demande (en valeur absolue) :

$$\frac{p^m - c}{p^m} = \frac{1}{|\varepsilon^m|}$$

L’indice de Lerner est une mesure du *mark-up* du monopole (de son profit marginal). Il renseigne sur la capacité du monopole à fixer un prix supérieur à son coût marginal. C’est précisément l’intensité avec laquelle il peut abuser de sa position dominante qui détermine le pouvoir du monopole.

L’élasticité de la demande mesure la sensibilité de la demande face à une variation du prix. Grossièrement, la demande est dite élastique (resp. inélastique) si celle-ci est très sensible (resp. peu sensible) aux variations du prix.

Ainsi, à l’équilibre du monopole, plus la demande est élastique (resp. inélastique), et plus le mark-up est faible (resp. élevé). En effet, lorsque la demande est inélastique, le monopole a intérêt à fixer un prix élevé qui ne contractera que faiblement la demande s’adressant à lui tout en lui assurant un *mark-up* confortable. À l’inverse, lorsque la demande est élastique, le monopole a intérêt à fixer un prix faible qui saura suffisamment stimuler la demande s'adressant à lui de manière à compenser un profit marginal plus réduit.

Dans le cas limite où l'élasticité tend vers l'infini, le mark-up est nul et on retrouve bel et bien la tarification au coût marginal de la CPP. Dans ce cas, le monopole ne peut pas abuser de sa position dominante et cette impuissance trouve son origine dans les caractéristiques de la demande.

Chapitre 2 : Du point de vue du bien-être social, une discrimination de troisième type est-elle préférable à un prix uniforme ?

Cf. Correction de l'examen blanc 2013/2014

Chapitre 3 : Définir le problème de la double marge et expliquer comment y remédier.

Cf. Correction de l'examen de CM 2013/2014

Chapitre 4 : Rappelez quelles stratégies (prix choisis par chacun des joueurs) constituent l'unique équilibre de Nash du modèle de base de Bertrand et expliquez pourquoi celui-ci est souvent qualifié de paradoxe. En quoi l'introduction de contraintes de capacité, d'une différentiation des produits ou encore d'une répétition infinie des interactions stratégiques peut expliquer que l'équilibre du modèle de base de Bertrand n'est que rarement observé en pratique? Détaillez votre réponse.

Cf. Correction de l'examen blanc 2012/2013

KIT DE SURVIE EN RECHERCHE D'EXTREMA LIÉS

<u>Remarques préliminaires</u> : Ce court document n'a nullement la prétention de présenter la question de la recherche d'extrema liés avec toute la rigueur qui lui serait due ni avec exhaustivité (loin s'en faut !). Le but de ce document est simplement d'essayer de synthétiser les méthodes d'optimisation sous contraintes avec lesquelles vous devez être un minimum familiers pour vous sentir à l'aise avec les calculs réalisés au cours de ce TD de Miroéconomie en $L2$. Je m'excuse auprès des étudiants passionnés par les mathématiques pour les imprécisions qui parsèment ce document et auprès des étudiants à la curiosité insatiable qui auraient aimé en apprendre plus à ce sujet. À ceux-ci, je rappelle qu'il existe en $L3$ un cours optionnel d'optimisation que je vous incite vivement à suivre. J'en profite pour remercier mon frère (professeur agrégé de mathématiques) qui a bien voulu relire et corriger certains points de ce document.

1) Pour bien commencer

a) Un peu de vocabulaire

<u>Optimiser</u> signifie **<u>maximiser</u>** ou **<u>minimiser</u>** une fonction.

La fonction que l'on cherche à optimiser s'appelle la **<u>fonction objectif.</u>**

<u>Exemple :</u> u est la fonction objectif

La fonction objectif dépend d'une ou de plusieurs variables que l'on appelle **<u>arguments</u>**.

<u>Exemple :</u> La fonction u dépend de x_1 et de x_2. Ainsi, on peut l'écrire $u(x_1, x_2)$, x_1 et x_2 sont les arguments de cette fonction.

Les **<u>arguments maximaux</u>** (resp. **<u>arguments minimaux</u>**) d'une fonction correspondent aux valeurs des arguments qui maximisent (resp. minimisent) cette fonction.

La **<u>valeur optimale</u>** (maximale ou minimale) d'une fonction est égale à l'image de ses arguments optimaux (maximaux ou minimaux).

<u>Exemple :</u> On va chercher à déterminer les arguments maximaux (x_1^*, x_2^*) de manière à ce que la fonction u soit maximale et ainsi calculer cette valeur maximale : $u(x_1^*, x_2^*)$

On parle d'**<u>optimisation libre</u>** lorsqu'on optimise la fonction objectif sans introduire quelque contrainte que ce soit. On parle d'**<u>optimisation sous contrainte</u>** ou encore d'**<u>optimisation liée</u>** si l'on introduit une ou plusieurs contraintes sur les arguments.

Une contrainte peut être écrite sous forme d'**<u>équation</u>** $(g(x_1, x_2) = 0)$ ou d'**<u>inéquation</u>** $(g(x_1, x_2) \geq 0)$ (ou bien $g(x_1, x_2) \leq 0$ peu importe).

On parlera de **<u>solution</u>** pour désigner les arguments optimaux du problème d'optimisation.

<u>Exemple :</u> (x_1^*, x_2^*) est la solution du problème d'optimisation.

Dans le cas d'une contrainte écrite sous forme d'inéquation du type $g(x_1, x_2) \geq 0$, on dit que la contrainte est **saturée** (ou encore **active**) si à la solution du problème, $g(x_1^*, x_2^*) = 0$. On dit que la contrainte est **libre** (ou encore **passive**), si à la solution du problème, $g(x_1^*, x_2^*) > 0$.

Exemple : Si on vous demande de grimper le plus haut possible sur une montagne et qu'on vous donne $4h$. Si vous parvenez au sommet de la montagne (vous ne pouvez pas aller plus haut) en $3h$, alors c'est que la contrainte (temporelle) est libre. Si vous grimpez jusqu'à la dernière seconde, alors la contrainte est saturée.

Dans le cadre de ce TD de microéconomie, une solution est dite **intérieure** si celle-ci est telle que tous les arguments optimaux de la fonction objectif sont strictement positifs ($\boldsymbol{x}^* \gg \boldsymbol{0}$) (tous les éléments du vecteur x^* sont strictement positifs).

Un **programme d'optimisation** (ou **problème d'optimisation**) indique :

- Le type d'optimisation à réaliser : maximisation ou minimisation
- La fonction objectif à optimiser
- L'ensemble des arguments dont on doit déterminer la valeur optimale
- L'ensemble des contraintes

Exemple :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, g(x_1, x_2) \geq 0 \\ t.q.\, h(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

b) Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier les explications qui vont suivre, je pose les hypothèses suivantes (souvent vérifiées en microéconomie) :

- Il existe qu'une seule solution au problème d'optimisation. Elle est intérieure et unique.

Remarque : Faire l'hypothèse d'une solution intérieure nous simplifie grandement la vie ! En effet, sans cette hypothèse, il faudrait rajouter autant de contraintes écrites sous la forme d'inégalités de non-négativité que d'arguments de la fonction objectif ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$).

- Les conditions de second ordre sont vérifiées.

Remarque : Gardez bien à l'esprit que les méthodes qui vont être développées dans ce document permettent seulement d'identifier les points critiques, candidats à être solution du problème d'optimisation. Autrement dit, nous ne vérifions ici que les conditions nécessaires d'optimalité. Dans certains cas, celles-ci sont également suffisantes, mais la plupart du temps il faut s'intéresser aux conditions de second ordre de manière s'assurer que la courbure de la fonction objectif au voisinage du point critique est compatible avec le problème d'optimisation. Il serait en effet plutôt stupide d'identifier les arguments minimaux d'une fonction alors qu'on vous demande de la maximiser !

Remarque : Tout au long de cette fiche, je prendrai l'exemple de fonctions objectifs n'ayant que deux variables et de programmes d'optimisation ne comportant qu'une seule contrainte. Les explications que je propose peuvent naturellement s'appliquer dans les cas où le nombre de variables et/ou de contraintes est plus élevé.

c) Une astuce qui peut servir !

En économie, on a l'habitude de maximiser plutôt que de minimiser. Du coup, certains étudiants peuvent être mis en difficulté lorsqu'ils sont confrontés à un problème de minimisation. Pourtant, il existe une technique très simple qui vous permet de retomber sur vos pattes. En effet, les arguments minimaux de la fonction f et les arguments maximaux de la fonction $-f$ sont identiques. Ainsi, une fois que vous avez calculé les arguments maximaux de la fonction $-f$, il vous suffit de les substituer dans la fonction f pour obtenir sa valeur minimale.

2) Optimisation avec contraintes écrites sous forme d'égalités et fonctions implicites

Soit le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1,x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q. h(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Il existe deux méthodes de résolution.

La première consiste simplement à utiliser les fonctions implicites. La seconde s'appelle la méthode de Lagrange, elle fait appel aux conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker.

Les économistes semblent adorer utiliser un marteau pour assommer une mouche (« Pourquoi peut-on faire simple quand on peut faire compliqué ?! ») et ont tendance à utiliser la méthode de Lagrange pour résoudre ce problème d'optimisation que l'on pourrait pourtant traiter de manière triviale en faisant appel aux fonctions implicites. En effet, la méthode de Lagrange est un outil puissant qui permet de traiter les problèmes d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'inéquations. Il peut bien entendu être appliqué à la programme d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'égalités mais sa plus grande complexité le rend peu attractif. Malheureusement pour vous, on peut explicitement vous demander d'utiliser la méthode de Lagrange.

Dans cette première partie, je ne présenterai que la méthode dite des fonctions implicites. Je reviendrai dans la quatrième partie sur l'application de la méthode de Lagrange aux programmes d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'égalités.

a) Méthode

La contrainte écrite sous forme d'égalité $h(x_1, x_2) = 0$ permet de déterminer deux fonctions implicites : $x_2 = \varphi(x_1)$ et $x_1 = \psi(x_2)$. En substituant l'une ou l'autre de ces fonctions implicites dans la fonction objectif, nous allons non seulement « intégrer » la contrainte à la fonction objectif mais également transformer cette fonction initialement à deux variables à une fonction à une seule variable. Ainsi, en supposant que l'on ait utilisé la fonction $x_1 = \psi(x_2)$ le programme d'optimisation devient

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_2\}} u(\psi(x_2), x_2) \\ t.q. x_1 = \psi(x_2) \end{cases}$$

Notez bien que l'équation $x_1 = \psi(x_2)$ n'est pas vraiment une contrainte. Il s'agit plutôt d'une relation qui nous permettra *ex post* de déterminer x_1^* une fois que l'on aura calculé x_2^*. Le problème s'apparente ainsi à un programme d'optimisation libre d'une fonction objectif n'ayant qu'un seul argument. Afin de le résoudre, il suffit de déterminer la valeur optimale x_2^* qui annule la dérivée première de la fonction objectif.

$$\frac{\partial u(\psi(x_2), x_2)}{\partial x_2} = 0$$

Une fois que l'on a calculé x_2^*, il suffit de déduire la valeur optimale x_1^* via la fonction implicite ψ.

$$x_1^* = \psi(x_2^*)$$

Enfin, on peut déterminer la valeur optimale de la fonction objectif en y substituant les arguments maximaux.

$$u(x_1^*, x_2^*)$$

b) Exemple

Soit $(x_1, x_2) = 2x_1x_2$, $h(x_1, x_2) = R - x_1p_1 - x_2p_2$

Nous cherchons à déterminer le couple (x_1^*, x_2^*) qui maximise la fonction $u(x_1, x_2)$ sous la contrainte écrite sous forme d'égalité que $h(x_1, x_2) = 0$

Le programme s'écrit donc

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1,x_2\}} 2x_1x_2 \\ t.q. R - x_1p_1 - x_2p_2 = 0 \end{cases}$$

On peut déterminer les deux fonctions implicites à la contrainte (la détermination d'une seule d'entre elles suffirait) :

$$x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 = \varphi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{R}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}x_2 = \psi(x_2)$$

En substituant l'une ou l'autre de ces fonctions implicites dans la fonction objectif, on peut alors réécrire le problème de maximisation de la sorte :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1\}} \left(x_1, \varphi(x_1)\right) \\ t.q. x_2 = \varphi(x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\limits_{\{x_1\}} 2x_1(\frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1) \\ t.q. x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \end{cases}$$

Nous faisons désormais face à un problème de maximisation s'apparentant à de l'optimisation libre pour lequel la fonction objectif n'a qu'un seul argument (x_1). Pour résoudre ce problème, il suffit de déterminer la valeur optimale x_1^* pour laquelle la dérivée première de la fonction objectif s'annule :

$$\frac{\partial u\left(x_1, \varphi(x_1)\right)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1^* = \frac{R}{2p_1}}$$

D'après la fonction implicite φ, on déduit immédiatement la valeur optimale x_2^* :

$$x_2^* = \varphi(x_1^*) \Leftrightarrow x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1^* \Leftrightarrow x_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{R}{2p_1}\right) \Leftrightarrow \boxed{x_2^* = \frac{R}{2p_2}}$$

On peut enfin déterminer la valeur optimale prise par la fonction objectif :

$$u(x_1^*, x_2^*) = 2x_1^* x_2^* \Leftrightarrow u(x_1^*, x_2^*) = 2\left(\frac{R}{2p_1}\right)\left(\frac{R}{2p_2}\right) \Leftrightarrow \boxed{u(x_1^*, x_2^*) = \frac{R^2}{2p_1 p_2}}$$

3) Optimisation sous contraintes écrites sous forme d'inégalités et méthode de Lagrange

Lorsque l'on a affaire à un problème d'optimisation sous contraintes écrites sous forme d'inégalités, la méthode précédemment présentée ne peut plus s'appliquer. On utilise alors la méthode de Lagrange et les conditions d'optimalité de Kuhn & Tucker.

a) Méthode

Supposons que nous devions résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, h(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

La première étape consiste à définir la fonction de Lagrange L associée à ce problème :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)\,;\, \lambda \geq 0$$

Notez que par convention, on écrit toujours les contraintes écrites sous forme d'inégalités sous la forme $h(x_1, x_2) \geq 0$. Ainsi, si vous avez une contrainte du type $R \geq x_1 p_1 + x_2 p_2$, alors $h(x_1, x_2) = R - p_1 x_1 - p_2 x_2$. Si vous avez une contrainte du type $y_1 \leq 2\sqrt{y_2}$, alors $h(x_1, x_2) = 2\sqrt{y_2} - y_1$

La fonction de Lagrange associée à un problème d'optimisation se définit simplement comme la somme de la fonction objectif et des contraintes, celles-ci étant pondérées par les multiplicateurs de Lagrange leur étant associés (un multiplicateur par contrainte).

La variable λ est appelée multiplicateur de Lagrange. Sa valeur dépend des arguments de la fonction objectif. Un multiplicateur de Lagrange (lorsqu'il est évalué à la solution du problème), indique la variation de la fonction objectif à laquelle conduirait un relâchement marginal de la contrainte lui étant associée.

<u>Exemple :</u> Dans le cadre de l'équilibre du consommateur, cela revient à se poser la question suivante : si je donne un euro de plus au consommateur, de combien va-t-il pouvoir faire progresser son utilité totale ? C'est précisément ce que mesure la valeur prise à la solution du problème par le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire. Il correspond ici à l'utilité marginale du revenu.

Ainsi, lorsqu'à la solution du problème la contrainte est libre, on comprend que le multiplicateur y étant associé sera nul.

<u>Exemple :</u> Dans le cadre de l'équilibre du consommateur, si à la solution du problème ma contrainte budgétaire est libre, c'est que je ne dépense déjà pas tout mon revenu. Ainsi, si on me donne un euro de plus, cela ne va pas me permettre de faire progresser mon utilité. L'utilité marginale du revenu est nulle.

En revanche, lorsqu'à la solution du problème la contrainte est active, alors le multiplicateur y étant associé sera positif.

<u>Exemple :</u> Dans le cadre de l'équilibre du consommateur, lorsqu'à la solution du problème je dépense l'ensemble de mon revenu, alors si on me donne un euro supplémentaire, cela va me permettre d'augmenter mon utilité via un panier de consommation mieux fourni. L'utilité marginale du revenu est positive.

<u>Remarque :</u> Supposons que nous fassions face au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{\{x_1,x_2\}} u(x_1,x_2) \\ t.q.\, h(x_1,x_2) \geq 0 \end{cases}$$

On pourrait bien sûr le transformer en un problème de maximisation conformément à ce qui a été expliqué précédemment. Si l'on ne souhaite pas utiliser cette astuce, alors la fonction de Lagrange L étant associée à ce programme de minimisation s'écrit ainsi :

$$L(x_1,x_2,\lambda) = u(x_1,x_2) - \lambda h(x_1,x_2)\,;\, \lambda \geq 0$$

Désormais, la fonction de Lagrange se définit comme la différence entre la fonction objectif et la contrainte, celle-ci étant pondérée par le multiplicateur qui se doit d'être positif.

Revenons-en à notre problème de maximisation : un théorème nous dit que le système des conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker est le suivant (les dérivées partielles étant évaluées à la solution du problème) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = 0\ (1) \\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = 0\ (2) \\ \lambda^* \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = 0\ (3) \\ \lambda^* \geq 0\ (4) \end{cases}$$

Dans le cas présent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} - \lambda^* \dfrac{\partial h(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \lambda^* \dfrac{\partial h(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ \lambda^* h(x_1^*,x_2^*) = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

Il est possible de décomposer ces conditions en trois catégories :

- <u>**Les équations marginales $(1) + (2)$:**</u> elles s'apparentent aux conditions de premier ordre que l'on retrouve dans le contexte d'un programme d'optimisation libre. Elles indiquent simplement qu'à la solution du problème les dérivées premières de la fonction objectif (qui est désormais la fonction de Lagrange) doivent être nulles.

- **<u>Les relations d'exclusion (3) :</u>** À la solution du problème, chaque contrainte peut être soit libre, soit saturée. Si elle est saturée, alors $h(x_1^*, x_2^*) = 0$ et le multiplicateur y étant associé est positif ($\lambda^* \geq 0$). Si elle est libre, alors $h(x_1^*, x_2^*) > 0$ et le multiplicateur y étant associé est nul ($\lambda^* = 0$). Ainsi, le produit $\lambda^* h(x_1^*, x_2^*)$ est toujours nul, c'est précisément ce qu'indiquent les relations d'exclusion.

- **<u>Les contraintes de non-négativité des multiplicateurs (4) :</u>** Ces inéquations rappellent simplement que les multiplicateurs de Lagrange doivent être positifs.

La résolution de ce système permet de déterminer la solution du problème. On peut ensuite vérifier *ex post* que les contraintes sur les arguments sont bien respectées et enfin déterminer la valeur optimale prise par la fonction objectif.

<u>Remarque :</u> Dans le cas de contraintes multiples, le système des conditions premières peut devenir assez compliqué à résoudre. La technique de résolution que l'on peut employer consiste à envisager et tester la validité de chacune des configurations de la solution du problème admissible. Si par exemple on a deux contraintes, alors quatre cas seront à traiter : les deux contraintes sont libres, la première est libre et la seconde est saturée, la première est saturée et la seconde est libre et enfin les deux contraintes sont saturées. Dans chaque cas, ces hypothèses permettent de reformuler les relations d'exclusion et permettent alors de tester la validité des équations marginales.

a) Exemple

Supposons que nous ayons à résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{y_1 y_2\}} \pi(y_1, y_2) = p_1 y_1 - p_2 y_2 \\ t.q.\, y_1 \leq 2\sqrt{y_2} \end{cases}$$

Avec $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$

La fonction de Lagrange L y étant associée est la suivante :

$$L(y_1, y_2, \lambda) = p_1 y_1 - p_2 y_2 + \lambda(2\sqrt{y_2} - y_1)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \lambda^* \dfrac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 - \lambda^* = 0 \\ -p_2 + \dfrac{\lambda^*}{\sqrt{y_2^*}} = 0 \\ \lambda^*(2\sqrt{y_2^*} - y_1^*) = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

Puisque $p_1 > 0$, alors $\lambda^* > 0$. Ainsi, la contrainte va être saturée : $y_1^* = 2\sqrt{y_2^*}$. Ainsi, on peut réécrire les conditions d'optimalité de la sorte :

$$\begin{cases} p_1 = \lambda^* > 0 \\ -p_2 + \dfrac{p_1}{\sqrt{y_2^*}} = 0 \\ 2\sqrt{y_2^*} - y_1^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \lambda^* > 0 \\ y_2^* = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^2 \\ 2\sqrt{y_2^*} - y_1^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \lambda^* > 0 \\ y_2^* = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^2 \\ 2\sqrt{\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^2} - y_1^* = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda^* = p_1 > 0 \\ y_2^* = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \\ y_1^* = \frac{2p_1}{p_2} \end{cases}}$$

On peut désormais calculer la valeur optimale prise par la fonction objectif :

$$\pi(y_1^*, y_2^*) = p_1\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) - p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{\pi(y_1^*, y_2^*) = \frac{p_1^2}{p_2}}$$

4) Optimisation sous contraintes écrites sous forme d'égalités et méthode de Lagrange

Lorsque les contraintes sont écrites sous forme d'égalités, nous avons vu qu'il est possible de résoudre le problème d'optimisation très simplement en utilisant les fonctions implicites. Pourtant, certains professeurs peuvent vous demander explicitement d'utiliser la méthode de Lagrange.

a) Méthode

Supposons que l'on vous demande de résoudre le programme suivant en utilisant la méthode de Lagrange :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, h(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

La contrainte $h(x_1, x_2) = 0$ peut-être appréhendée comme le cas limite d'une contrainte écrite sous forme d'inégalité du type $h(x_1, x_2) \geq 0$ qui serait saturée à la solution du problème. C'est comme cela qu'il faut aborder le problème : faire « comme si » on avait affaire à une contrainte écrite sous forme d'inégalité et anticiper qu'elle sera saturée à la solution du problème.

Ainsi, la fonction de Lagrange associée à ce programme est la même que celle que nous aurions associé au problème suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} u(x_1, x_2) \\ t.q.\, h(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

En l'occurrence :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)$$

Ce qui va différer, c'est bien entendu la forme prise par les conditions d'optimalité de Kuhn & Tucker. En effet, dans le cas présent, la relation d'exclusion traduit simplement le fait que la contrainte va être saturée à la solution du problème ($h(x_1^*, x_2^*) = 0$ et $\lambda^* \geq 0$). Ainsi, le système des conditions nécessaires d'optimalité s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \dfrac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \dfrac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ h(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

On observe donc que rien ne change par rapport à de la programmation sous contraintes écrites sous forme d'inégalités si ce n'est le fait que l'on connait déjà la configuration de la solution finale : la contrainte sera saturée.

b) Exemple

Reprenons le même exemple que celui que nous avions traité dans la première partie de cette fiche. Nous avions alors utilisé la méthode des fonctions implicites, montrons que l'on peut parvenir au même résultat avec la méthode de Lagrange (bien que cela soit nettement moins trivial)

Soit $(x_1, x_2) = 2x_1x_2$, $h(x_1, x_2) = R - x_1p_1 - x_2p_2$

Nous cherchons à déterminer le couple (x_1^*, x_2^*) qui maximise l'expression $u(x_1, x_2)$ sous la contrainte écrite sous forme d'égalité $h(x_1, x_2) = 0$

Le programme s'écrit donc

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x_1, x_2\}} 2x_1x_2 \\ t.q. R - x_1p_1 - x_2p_2 = 0 \end{cases}$$

La fonction de Lagrange L associée à ce problème prend la firme suivante :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1x_2 + \lambda(R - x_1p_1 - x_2p_2)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn & Tucker sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

<u>Détail de la résolution :</u>

$$\begin{cases} 2x_2^* - \lambda^* p_1 = 0 \\ 2x_1^* - \lambda^* p_2 \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \lambda^* \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{p_1}{p_2} x_1^* = x_2^* \\ R - x_1^* p_1 - x_2^* p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_1^*}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \\ \dfrac{p_1}{p_2} x_1^* = x_2^* \\ R - x_1^* p_1 - \left(\dfrac{p_1}{p_2} x_1^*\right) p_2 = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\left(\dfrac{R}{2p_1}\right)}{p_2} = \dfrac{2x_2^*}{p_1} = \lambda^* \geq 0 \\ \dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{R}{2p_1}\right) = x_2^* \\ x_1^* = \dfrac{R}{2p_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{R}{p_1 p_2} = \lambda^* \geq 0 \\ \dfrac{R}{2p_2} = x_2^* \\ \dfrac{R}{2p_1} = x_1^* \end{cases}}$$

On peut enfin déterminer la valeur optimale prise par la fonction objectif :

$$u(x_1^*, x_2^*) = 2x_1^* x_2^* \Leftrightarrow u(x_1^*, x_2^*) = 2\left(\frac{R}{2p_1}\right)\left(\frac{R}{2p_2}\right) \Leftrightarrow \boxed{u(x_1^*, x_2^*) = \frac{R^2}{2p_1 p_2}}$$

On retrouve bel et bien les résultats auxquels nous étions parvenus dans la seconde partie.

On peut vérifier que la valeur prise à la solution du programme par le multiplicateur de Lagrange correspond à l'utilité marginale du revenu :

$$\boxed{\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial R} = \frac{R}{p_1 p_2} = \lambda^*}$$

KIT DE SURVIE EN THÉORIE DES JEUX

<u>Remarques préliminaires</u> : Ce court document n'a nullement la prétention de présenter la théorie des jeux avec toute la rigueur et l'exhaustivité qui lui seraient dues (loin s'en faut !!). Le but de ce kit est simplement de vous donner quelques notions en la matière afin que vous vous sentiez à l'aise avec le raisonnement que nous élaborerons ainsi qu'avec les méthodes que nous emploierons au cours de ces séances. Sachez en effet que la plupart des thèmes d'organisation industrielle font appel à la théorie des jeux. C'est pourquoi je vous incite très vivement à suivre ce semestre le cours optionnel de « Théorie des Jeux ». Je m'excuse auprès des étudiants aurait aimé que ce kit fasse preuve de davantage de rigueur pour les imprécisions qui parsèment ce document et auprès des étudiants à la curiosité insatiable qui auraient aimé en apprendre plus à ce sujet. Ce kit de survie s'inspire très largement de l'ouvrage « Théorie des jeux et analyse économique » de G. Demange et J.P. Ponssard dont je vous recommande la lecture.

Introduction

La théorie des jeux a pour but d'analyser les prises de décision d'individus placés en situation d'interdépendance. Sa principale originalité consiste à postuler la rationalité des acteurs, ceux-ci étant conscients non seulement de leurs propres objectifs, mais aussi de ceux des autres protagonistes. Elle trouve l'origine de son appellation dans les jeux de société dont l'analyse nécessite à l'évidence la prise en compte de l'interaction stratégique entre les joueurs.

<u>Remarque :</u> Ce kit est plus spécifiquement consacré à la théorie des jeux dits non coopératif. Dans un jeu non coopératif, les joueurs ne peuvent pas conclure d'accords irrévocables entre eux avant de s'engager dans l'action. Cette hypothèse se justifie dans de multiples situations. Ces justifications peuvent être d'ordre physique (impossibilité de communiquer, d'ordre légal (interdiction de se concerter entre concurrents) ou d'ordre technique (difficulté à prévoir l'avenir et à s'engager dans un contrat). Partant de l'hypothèse que chaque joueur garde sa liberté d'engagement, l'objectif de la théorie des jeux non coopératifs est de caractériser les issues possibles d'une interaction stratégique lorsque chaque joueur aborde cette interaction de manière rationnelle.

Chapitre I : Les jeux simultanés à information complète : les jeux sous forme normale

1) Modèles et exemples

a) La forme normale

La forme normale retient les éléments de base d'une situation d'interaction, à savoir les protagonistes et, pour chacun d'entre eux, leurs stratégies disponibles et leur évaluation des conséquences découlant des choix effectués par tous.

Aussi, un *jeu sous forme normale* est la donnée de $(N, X_i, u_i, i \in N)$, où :

- L'ensemble $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ représente l'ensemble des protagonistes appelés *joueurs*

- Pour chaque joueur i, X_i est l'ensemble de ses stratégies disponibles. Le choix par chaque joueur d'une stratégie détermine l'issue du jeu.

On notera :

x_i une stratégie de i,

$x = (x_1, \dots, x_n)$ une issue, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ l'ensemble des issues ; et aussi :

$x = (x_i, x_{-i})$ où x_{-i} représente les stratégies des joueurs autres que i,

$X_{-i} = \prod_{i \neq j} X_j$ l'ensemble des stratégies des joueurs autres que i ;

- Pour chaque joueur i, u_i est une fonction numérique sur l'ensemble des issues X. La fonction u_i est appelée *fonction d'utilité* ou encore *fonction de paiement*. Elle représente les préférences du joueur sur les issues. Autrement dit :

$u_i(x) > u_i(x')$ signifie que le joueur i préfère strictement l'issue x à l'issue x' et

$u_i(x) = u_i(x')$ signifie qu'il est indifférent entre les deux issues.

Les deux hypothèses suivantes sous-tendent la donnée d'un jeu sous forme normale :

- ***Indépendance stratégique :*** *les joueurs sélectionnent leur stratégie indépendamment les uns des autres*

Toute coordination formelle entre les joueurs, par exemple sous la forme d'une sélection conjointe d'une issue du jeu, est ainsi exclue. Cette hypothèse, très importante, est réalisée par exemple si les stratégies sont sélectionnées simultanément ou en secret.

- ***Information complète :*** *les joueurs connaissent la forme normale* $(N, X_i, u_i, i \in N)$

Les joueurs ont ainsi une connaissance commune de la situation à laquelle ils sont confrontés : ils connaissent les autres joueurs, leur ensemble de stratégies et leur fonction d'utilité. Cette hypothèse permet de construire une théorie de l'interaction stratégique en se situant du point de vue de l'ensemble des acteurs concernés.

b) Exemples

- Les jeux finis

Un jeu est dit fini si tous les ensembles de stratégies sont finis.

La bataille de sexes

Les deux joueurs sont un homme (lui) et une gemme (elle). Chacun a le choix entre deux possibilités : acheter un billet soit pour une représentation à l'opéra, soit pour un match de boxe. Ces possibilités seront notées respectivement O et B. Ils préfèrent avant tout être ensemble, mais elle préfère l'opéra à la boxe et lui la boxe à l'opéra. On peut schématiser la situation par le tableau suivant dans lequel elle choisit une colonne et lui une ligne :

	B	O
B	$(4,2)$	$(1,1)$
O	$(0,0)$	$(2,4)$

Dans un tel tableau, chaque case correspond à une issue. Le nombre de gauche donne le niveau d'utilité atteint par le premier joueur, qui choisit une ligne, le nombre de droite celui atteint par le deuxième joueur, qui choisit une colonne. *Ces conventions de notation seront systématiquement utilisées dans ce kit.*

Le dilemme du prisonnier

Chaque joueur dispose de deux stratégies, l'une « Pacifique », P, l'autre « Agressive », A. Les paiements sont donnés par le tableau :

	P	A
P	$(1,1)$	$(-1,2)$
A	$(2,-1)$	$(0,0)$

Cette matrice a sans doute été la plus discutée en théorie des jeux en théorie des jeux. L'histoire d'origine est la suivante. Deux individus soupçonnés d'avoir accompli un sombre forfait, sont placés en garde à vue dans deux cellules différentes. Le juge propose à chacun le marché suivant : « Avoue ton crime et témoigne contre ton complice, tu bénéficieras d'une réduction de peine. Méfie-toi de lui, s'il est le seul à avouer, tu en prends pour vingt ans ». Le prisonnier est ainsi placé devant un dilemme. Dans les conditions de l'interrogatoire tel qu'il est précisé, il a intérêt à avouer quoi que fasse son complice (il choisit toujours A). Pourtant, s'ils pouvaient se concerter, ils n'auraient collectivement pas intérêt à avouer (ils choisiraient conjointement l'issue (P,P)).

Cet exemple célèbre illustre de façon criante le conflit possible entre la rationalité individuelle et une démarche collective qui voudrait que chaque joueur soit pacifique. De nombreuses situations économiques peuvent être représentées par le dilemme du prisonnier. Par exemple, dans une situation de duopole, la stratégie agressive correspond) un prix faible, et la stratégie pacifique à un prix élevé.

Pierre (P), Ciseaux (C), Papier (F pour feuille)

	P	C	F
P	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
C	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
F	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Cette matrice représente un jeu apprécié des enfants : La Pierre l'emporte sur les Ciseaux, qui l'emportent sur le Papier qui l'emporte sur la Pierre…

- ***Un jeu non fini (Enchères)***

Un objet est mis aux enchères. Tout acheteur potentiel i attribue une valeur v_i à l'objet. Son niveau d'utilité est de la forme suivante :

$(v_i - p)$ s'il reçoit l'objet et paye p,
0 sinon.

Considérons des enchères sous pli scellé : chaque joueur fait une seule offre, soumise dans une enveloppe cachetée. En pratique, deux types d'enchères sont communément utilisées, l'une dite au premier prix, l'autre au second prix. Dans les deux cas, l'objet est alloué au plus offrant (avec tirage au sort s'il en existe plusieurs). Dans l'enchère au premier prix, le bénéficiaire de l'objet paye son enchère, alors que dans l'enchère au second prix, il paye seulement la seconde meilleure enchère.

Les ensembles de stratégies sont $X_i = [0, +\infty)$ où x_i représente l'enchère de i. Étant donné une issue x, ordonnons les enchères :

$$x_j \geq x_k \geq ..$$

Et notons $\hat{x} = x_j, \tilde{x} = x_k$ ($\hat{x} = \tilde{x}$ si au moins deux personnes ont soumis l'enchère la plus élevée).

Les fonctions de paiement sont :

$$u_i(x) = \frac{v_i - p}{m} \text{ si } x_i = \hat{x} \text{ et } m \text{ personnes ont annoncé } \hat{x}$$

$$0 \text{ sinon}$$

Où

$$p = \hat{x} \text{ pour l'enchère au premier prix,}$$
$$p = \tilde{x} \text{ pour l'enchère au second prix.}$$

Nous avons modélisé une situation d'enchères comme un jeu sous forme normale.

2) Définir la rationalité

L'hypothèse fondamentale de la théorie des jeux est que chaque joueur cherche à maximiser son niveau d'utilité, indépendamment des autres et connaissant les données du jeu, à savoir $(N, X_i, u_i, i \in N)$. *Comme nous allons le voir, cette hypothèse ne permet pas de définir « la » solution du jeu.*

Nous devrions d'abord définir une notion décentralisée de rationalité individuelle. Ceci nous conduirait à étudier les *stratégies dominantes, dominées, prudentes* et à définir le concept d'équilibre, obtenu par *élimination successives des stratégies strictement dominées*. Cependant, cette approche se révèle en général insuffisante et d'autres concepts doivent être introduits. Puisque les niveaux d'utilité de chacun dépendent des stratégies des autres et puisque chacun le sait, la notion de rationalité doit être abordée simultanément pour l'ensemble des joueurs. *L'équilibre de Nash* répond à cette vision d'une interaction stratégique.

Remarque : *Cette année en organisation industrielle, lorsque nous aurons affaire à des jeux sous forme normale, le critère d'équilibre que nous utiliserons pour résoudre les modèles est l'équilibre de Nash. Je me permettrai donc, dans un souci de parcimonie, d'éluder la présentation des autres concepts.*

a) L'équilibre de Nash

Considérons un jeu sous forme normale. Supposons que, avant de jouer, les joueurs se rencontrent et tentent d'harmoniser leurs stratégies. Supposons en outre que si un accord est conclu, sa violation par l'un des joueurs n'entraîne aucune pénalité. Dans de telles conditions, les joueurs se doivent de rechercher une issue qui respecte une certaine stabilité interne, dans le sens où aucun d'entre eux ne peut, en changeant *unilatéralement* de stratégie, augmenter son niveau d'utilité. Ceci conduit à la définition de l'équilibre de Nash.

Définition : *Une issue x^* du jeu $(N, X_i, u_i, i \in N)$ est un équilibre de Nash si :*

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x^*_{-i}) \quad \forall i \in N, \forall x_i \in X_i$$

Exemples :

- *La bataille des sexes admet deux équilibres : (Opéra, Opéra) et (Boxe, Boxe) de paiements respectifs (4,2) et (2,4).*
- *Le dilemme du prisonnier admet un seul équilibre (Agressif, Agressif).*
- *Le jeu Pierre, Ciseaux, Papier, malgré sa simplicité, n'admet aucun équilibre*

Remarque : *Ce dernier jeu admet un équilibre de Nash en stratégies aléatoires. Cependant, nous n'aurons pas besoin d'un tel critère d'équilibre en organisation industrielle cette année alors je préfère ne pas rentrer dans le détail*

- *Existence et calcul des équilibres*

Trouver les conditions qui garantissent l'existence d'un équilibre est un problème mathématique difficile. *A fortiori*, la recherche numérique des équilibres peut se révéler très ardue.

Les correspondances de meilleure réponse

La correspondance de meilleure réponse d'un joueur donne ses choix optimaux vis-à-vis de toutes les stratégies possibles des autres joueurs.

Définition : *La correspondance φ_i de meilleure réponse du joueur i est définie sur X_{-i} à valeurs dans X_i par :*

$$\varphi_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i \ tel\ que\ u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(x'_i, x_{-i}) \forall x'_i \in X_i\}$$

Ainsi, $\varphi_i(x_{-i})$ est un sous-ensemble de stratégies de i éventuellement vide. On peut réunir les meilleures réponses de tous les joueurs en définissant la correspondance φ sur X à valeurs dans X par :

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_{-1}), \ldots, \varphi_n(x_{-n}))$$

Elle associe à une issue les meilleures réponses de chacun aux stratégies des autres.

Par définition, en un équilibre, chacun utilise une meilleure réponse. Plus précisément, x^* est un équilibre si et seulement si :

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x^*_{-i}) \quad \forall i \in N, \forall x_i \in X_i \Leftrightarrow (x^*_i \in \varphi_i(x^*_{-i}) \ \ \forall i \in N) \Leftrightarrow x^* \in \varphi(x^*)$$

On obtient ainsi une caractérisation des équilibres de Nash à l'aide de la correspondance des meilleures réponses :

$$x^* \textit{ est un équilibre de Nash} \Leftrightarrow x^* \in \varphi(x^*)$$

<u>*Exemple : Duopole en quantité (à la Cournot)*</u>

Considérons deux firmes produisant le même bien. Elles doivent décider indépendamment leur niveau de production. Si elles produisent respectivement x_1 et x_2, le prix de vente s'établira à $D - \beta(x_1 + x_2)$. Chaque firme produit à coût marginal constant c. Il n'y a pas de coût fixe. Les firmes maximisent leur profit.

Cette situation se représente par la forme normale :

$$X_1 = X_2 = [0, +\infty[$$

$$u_i(x_1, x_2) = (D - \beta(x_1 + x_2) - c)x_i \quad i = 1,2$$

La fonction u_i est strictement concave car sa dérivée seconde, constamment égale à $-\beta$, est négative.

Il existe une meilleure réponse à x_2 donnée par :

$$\varphi_1(x_2) = \frac{D - c - \beta x_2}{2\beta} \quad si\ x_2 \leq \frac{D - c}{\beta}$$

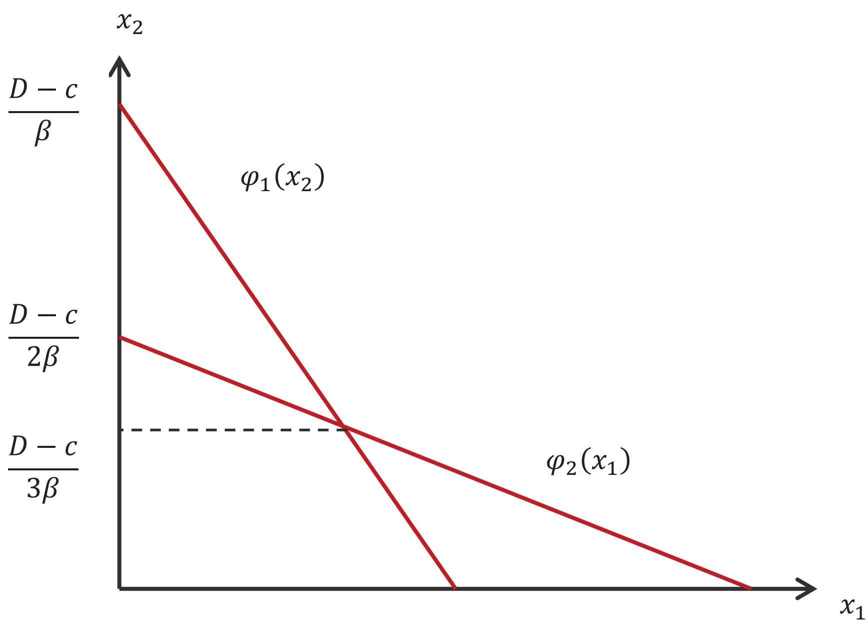
$$0\ sinon$$

La fonction φ_2 s'obtient de même.

Traçons dans le plan(x_1, x_2) les graphes de ces fonctions :

$$\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | x_1 = \varphi_1(x_2)\}\ et\ \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | x_2 = \varphi_2(x_1)\}$$

<u>*Graphique 1 :*</u> *Le duopole en quantité*



Les équilibres sont par construction les points d'intersection de ces graphes. Supposons $D > c$. L'équilibre est unique et symétrique : $x_1^* = x_2^* = \frac{D-c}{3\beta}$.

Chapitre II : Prendre en compte le temps et l'information : les jeux sous forme développée

Dans de nombreuses situations d'interdépendance stratégique, les protagonistes interviennent à plusieurs reprises. De plus, une fois leurs actions sélectionnées, ils en évaluent parfois mal les conséquences, aussi bien sur eux-mêmes que sur les autres. La forme normale apparait *a priori* mal adaptée pour représenter de telles situations. Aussi introduit-on un nouvel outil appelé *forme développée*. La forme développée détaille le déroulement d'une partie en précisant les circonstances dans lesquelles chaque joueur doit agir. Une telle forme est aussi appelée *forme extensive* ou encore *arbre de jeu*.

Cependant, cette représentation s'avère souvent trop complexe pour une résolution directe. Aussi a-t-on recours à la *mise sous forme normale* de la forme développée. Par son caractère normalisé la forme normale se prêt bien à des calculs numériques. La mise sous forme normale repose sur une réinterprétation du concept de stratégie. L'idée de base est de définir par stratégie la spécification des actions du joueur en toutes circonstances où il peut avoir à intervenir. Une stratégie devient ainsi un plan d'action. Considérons deux exemples typiques : les jeux d'échecs et de poker.

Dans un jeu d'échecs, une stratégie doit préciser le coup à jouer pour toute configuration possible de l'échiquier. Faisant abstraction des capacités de mémoire d'un ordinateur, les stratégies des deux joueurs, une fois programmées permettent de calculer le déroulement de la partie ainsi que son issue. Le jeu est ainsi mis sous forme normale. Dans un jeu de poker, une stratégie doit préciser les actions du joueur pour toutes les mains possibles. On pourrait penser qu'il suffit au joueur de décider son comportement uniquement à la vue de sa main, indépendamment des autres mains qu'il aurait pu avoir. Un peu de réflexion ou de pratique, montre la fausseté de ce raisonnement. Les autres joueurs, qui eux ne connaissent pas ses cartes, se représentent son comportement pour toutes les mains possibles. En fonction de cette représentation et des coups effectivement joués, ils affinent leur information sur les positions respectives de chacun et décident ou non de rester dans la partie. Le comportement que prendrait le joueur dans toutes les situations possibles influence donc les comportements des autres joueurs et, en retour, son propre comportement pour une situation donnée. La notion de stratégie, en liant les comportements pour toutes les mains possibles, traduit donc la réalité du jeu. Cette notion permet une nouvelle fois de se ramener à la forme normale.

À ce point, le lecteur peut se demander quelle est la relation entre la forme développée et la forme normale associée. Cette relation repose sur la propriété d'*optimalité conditionnelle* des équilibres de Nash. Explicitons cette propriété. Un ensemble de stratégies définit une *trajectoire* (la séquence des coups élémentaires correspondants). Si ces stratégies forment un équilibre de Nash, en aucun point de la dite trajectoire, aucun joueur n'a intérêt à dévier. Ainsi, l'équilibre, bien qu'obtenu sur une forme apparemment statique, possède des propriétés d'optimisation dynamique qui en font une solution possible du jeu sous forme développée.

Cependant, revenant maintenant à la forme développée, l'optimisation conditionnelle n'impose aucune contrainte de rationalité en dehors de la trajectoire. Ceci généralise un phénomène bien connu dans les programmes d'optimisation sur un arbre de décision. Un tel programme, qui peut être vu comme un jeu à un seul joueur, admet une trajectoire optimale en générale unique. Toute stratégie qui conduit à cette trajectoire est optimale *même si* elle spécifie des actions irrationnelles en dehors de cette trajectoire. Or, on peut vouloir ne considérer que les stratégies rationnelles en tout point de l'arbre. De telles stratégies existent et s'obtiennent aisément par programmation dynamique.

De la même façon, dans un jeu sous forme développée, on peut imposer des contraintes de rationalité plus fortes que celles de l'équilibre de Nash correspondant à la forme normale associée. Ces contraintes, exprimées directement sur l'arbre du jeu, conduisent aussi à des procédures de calcul très pratiques, inspirées, elles aussi, de la programmation dynamique. Cependant, il faut souligner qu'aucun critère de rationalité applicable à tous les jeux sous forme développée n'a pu être défini de manière entièrement satisfaisante.

En définitive, la démarche adoptée ici consiste à souligner à la fois l'intérêt technique de la mise sous forme normale et l'intérêt conceptuel d'hypothèses complémentaires de rationalité dans la forme développée. Ceci nous conduira à définir les *équilibres parfaits*.

1) Jeux à information parfaite

Ce sont des jeux dans lesquels les joueurs :

- Prennent leurs actions les uns après les autres, dans un ordre déterminé par les règles du jeu, en connaissant à tout instant les actions déjà choisies (information parfaite) ;

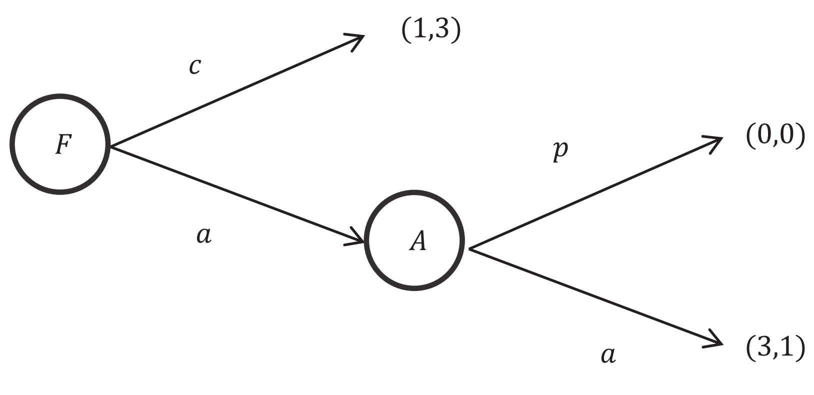
- Les joueurs ont à toute phase de jeu le même état d'information sur d'éventuels éléments aléatoires.

Le jeu d'échecs est le prototype du jeu à information parfaite mais le « 421 », qui comporte des tirages à l'aide des dés, est aussi un jeu à information parfaite. Par contre, le poker ne remplit pas la seconde condition car chaque joueur est le seul à connaitre ses propres cartes.

Dans cette section, nous nous limitons à des jeux où les joueurs n'ont à intervenir qu'un nombre fini de fois, quel que soit le déroulement de la partie. Si, de plus, le nombre d'actions disponibles à chaque étape est fini, on a l'habitude de représenter le jeu par un diagramme appelé arbre du jeu.

a) L'arbre de jeu

<u>Graphique 2 :</u> *Un jeu Fournisseur Acheteur*



Cet arbre modélise la situation suivante : un fournisseur (F) souhaite arrêter la fabrication onéreuse de pièces de rechange pour un matériel périmé. L'acheteur (A) de ce matériel, couvert par une garantie, peut engager des poursuites en cas d'arrêt de la production. Bien que certain de gagner, ces poursuites lui seraient très couteuses.

Les deux flèches issues de F représentent les deux actions possibles du fournisseur : continuer (c) ou arrêter (a) la production. S'il continue, plus rien ne se passe : c'est une « fin de partie », et le vecteur $(1,3)$ donne les paiements atteints par le fournisseur et l'acheteur. Si le fournisseur arrête, les deux flèches issues de A indiquent les deux actions possibles de l'acheteur : engager des poursuites (p) ou les abandonner (a), avec pour chaque cas les paiements correspondants. Généralisons cette construction.

<u>Définition :</u> Un arbre de jeu à information parfaite consiste en :

- Un ensemble de points reliés par des flèches telles que d'un point particulier, appelé origine de l'arbre part un et un seul chemin fléché vers tout autre point ; l'origine correspond au début du jeu ; tout point dont il ne part aucune flèche est un point terminal et correspond à une fin de partie

- Tout point non terminal de l'arbre comporte l'indice du joueur qui doit intervenir en ce point, il devra choisir entre une des flèches issues de ce point ;

- Le vecteur des paiements de chaque joueur en tout point terminal

b) Forme normale

Une stratégie du joueur i spécifie, en chaque point indicé par i, l'action qu'il choisirait si le point était atteint au cours du déroulement de la partie, la donnée d'une stratégie pour chaque joueur détermine un unique chemin de l'origine vers une fin de partie. Ce chemin, appelé *trajectoire*, représente le déroulement de la partie. Les paiements obtenus à la fin de partie atteinte donnent donc les paiements associés aux stratégies. Nous avons ainsi défini l'ensemble des stratégies et les fonctions d'utilité : c'est la forme normale du jeu.

Ainsi, la forme normale du jeu Fournisseur-Acheteur est :

	p	a
c	$(1,3)$	$(1,3)$
a	$(0,0)$	$(3,1)$

Il est important de comprendre que différents couples de stratégies peuvent générer la même trajectoire : il suffit que ces stratégies diffèrent seulement sur les sommets qui ne sont pas sur la trajectoire ; c'est le cas dans l'exemple ci-dessus pour (continuer, poursuivre) et (continuer, abandonner)

- ***Crédibilité des équilibres de Nash***

Une fois le jeu mis sous forme normale, il est naturel de considérer ses équilibres de Nash ? Dans le jeu Fournisseur-Acheteur, il existe deux équilibres de Nash : (continuer, poursuivre) et (arrêter, abandonner). Nous retrouvons le problème de multiplicité d'équilibres déjà évoqué.

Cependant, le contexte permet ici de les distinguer. En effet, le premier équilibre repose sur une menace de l'acheteur : il engagera des poursuites en cas d'arrêt de la production bien que, pour lui, il serait alors préférable d'abandonner.

Une question naturelle se pose : la menace correspondante est-elle crédible ? Le fournisseur sait que l'acheteur n'aurait pas intérêt à mettre sa menace à exécution. Il peut éliminer cette menace non crédible. Le seul équilibre satisfaisant est alors (arrêter, abandonner). Ceci constitue un exemple de l'utilisation du contexte pour opérer une sélection entre les multiples équilibres identifiables à partir de la forme normale. Pour généraliser cette démarche à tous les jeux à information parfaite nous procéderons en deux temps. Nous allons d'abord préciser une propriété fondamentale vérifiée par un équilibre de Nash.

- ***Optimalité conditionnelle des équilibres de Nash***

Pour énoncer cette propriété, nous avons besoin de la définition suivante.

<u>Définition :</u> *On appelle sous-jeu d'un arbre à information parfaite tout arbre de jeu en prenant n'importe quel point non terminal de l'arbre initial comme nouveau point d'origine.*

Tout se passe comme si les joueurs commençaient le jeu par ce nouveau point.

Considérons un équilibre de Nash et un sous jeu. Distinguons deux cas :

- Le point initial du sous-jeu appartient à la trajectoire de l'équilibre (on dit aussi que le sous-jeu est « atteint ». Dans ce cas, les stratégies induites par l'équilibre dans le sous-jeu doivent être un équilibre du sous jeu : une déviation profitable dans le sous-jeu entrainerait une déviation profitable dans le jeu global ;

- Le point initial du sous-jeu n'appartient pas à la trajectoire de l'équilibre. Dans ce cas, la restriction des stratégies à ce sous-jeu peut être modifiée de façon quelconque sans modifier les paiements puisque les actions ne seront jamais mises en œuvre. Aussi, aucune contrainte de rationalité n'est imposée « hors » de la trajectoire. En résumé, un équilibre de Nash induit un équilibre de Nash dans tout sous-jeu atteint.

c) L'équilibre parfait

L'idée est simple : un équilibre de Nash spécifie des actions qui sont les meilleures réponses les unes aux autres uniquement le long de la trajectoire. Un équilibre est dit parfait s'il spécifie des actions vérifiant cette propriété dans tout l'arbre du jeu, même hors de la trajectoire associée aux stratégies considérées. Ceci permet d'éliminer toute menace qui ne serait pas crédible.

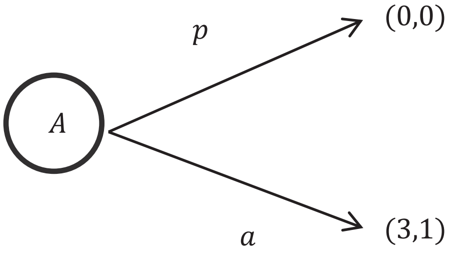
<u>Définition :</u> *On appelle équilibre de Nash parfait (ou plus simplement équilibre parfait) un ensemble de stratégies qui génèrent un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu.*

Évidemment, un équilibre parfait est un équilibre de Nash car le jeu entier est un sous-jeu.

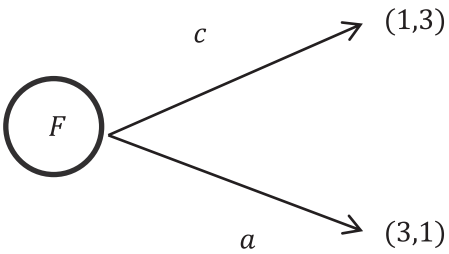
Nous allons montrer maintenant que tout arbre de jeu admet au moins un équilibre parfait.

- ***Construction d'un équilibre parfait***

Plaçons nous d'abord du point de vue de l'acheteur et considérons le sous-jeu correspondant.



C'est un jeu réduit à un joueur et le seul équilibre de ce sous-jeu consiste pour l'acheteur à retenir a. Connaissant cette situation, le fournisseur est maintenant confronté à un sous-jeu élémentaire :



Dans ce sous jeu, on a remplacé le sous-jeu acheteur par le paiement d'équilibre qui lui correspond. Le fournisseur choisit finalement a et le seul équilibre parfait est (a, a).

Cette procédure se généralise aisément à tout arbre à information parfaite de la façon suivante. On considère les points qui ne conduisent qu'à des fins de partie (il y en a puisque l'arbre est fini). En un tel point, le joueur qui doit jouer choisit l'une des fins de partie qu'il préfère et on remplace ce sous-jeu par le paiement de la fin de partie sélectionnée par le joueur. On continue ainsi de proche en proche et on arrive à l'origine. Cette procédure définit en tout point l'action choisie par le joueur qui doit jouer : elle donne donc bien des stratégies.

Par récurrence sur la taille de l'arbre (c'est-à-dire le nombre maximum de points sur un chemin), on démontre que ces stratégies forment un équilibre parfait et que tous les équilibres parfaits peuvent être obtenus ainsi.

Remarquons que cette procédure définit un unique équilibre si un joueur n'est jamais indifférent entre deux fins de partie. Par contre, en cas d'indifférence sur les fins de partie, cette procédure peut engendrer une multiplicité d'équilibres.

2) *Jeux répétés à information complète*

Les jeux répétés constituent un domaine de prédilection de l'économie. En effet, la plupart des situations économiques se situent dans un contexte plus ou moins récurrent, sans admettre ni début ni fin au sens strict. Cette classe de jeux est particulièrement simple à définir. Considérons un jeu simultané à information complète sous forme normale. Supposons maintenant que ce jeu soit répété plusieurs fois. À l'issue de chaque étape, les joueurs sont informés des actions prises par les autres joueurs. Dans ces conditions, chacun d'eux peut faire dépendre l'action utilisée à une étape donnée des actions observées jusqu'à cette étape. Il en résulte une capacité à mettre en œuvre des comportements très sophistiqués.

Si le jeu est répété de nombreuses fois, ces comportements peuvent être tellement complexes qu'une direction d'analyse doit être privilégiée. La direction habituellement retenue consiste à s'interroger sur la relation entre répétition d'un jeu et Pareto optimalité des paiements à l'équilibre. En d'autres termes, la durée de l'interaction favorise-t-elle la coopération entre les joueurs ? En général, la réponse est oui. Mais cette réponse peut dépendre des caractéristiques de la répétition : est-elle finie ou infinie, avec ou sans taux d'actualisation ? Les résultats obtenus sont connus sous le nom de « folk theorems », pour illustrer le fait qu'ils étaient plus ou moins bien connus avant que personne ne se soit vraiment donné la peine de les démontrer.

- ***La multiplication des équilibres***

La répétition d'un jeu génère souvent toute une série d'équilibres de Nash de plus en plus complexes. Autrement dit, *un équilibre de Nash du jeu répété ne consiste pas nécessairement à répéter les équilibres du jeu de base.*

- ***La crédibilité des représailles***

La multiplicité des équilibres est un phénomène inévitable dans les jeux répétés. Cette multiplication est un facteur à la fois positif et négatif. Il est positif : grâce à la prise en compte de la durée de leur relation, les joueurs peuvent coopérer de façon tacite et accroître leur paiement. Mais c'est aussi un facteur négatif dans la mesure où le résultat parait trop facile à obtenir. En effet, la coopération ne peut être stable dès lors qu'elle repose sur des menaces de représailles non crédibles. Une restriction naturelle s'impose. Elle consiste à écarter les stratégies qui spécifient des actions dominées en dehors de la trajectoire car elles ne constituent pas des menaces crédibles. En termes techniques, ceci revient à ne retenir que des équilibres parfaits pour lesquels les stratégies sont en équilibre dans tout sous-jeu. Ainsi, on reprend l'idée déjà exposée à propos des jeux à information parfaite.

On verra que, dans la plupart des jeux, la coopération peut être stabilisée par des menaces crédibles. Le concept d'équilibre parfait n'est alors pas très discriminant.

b) Jeux répétés : définitions

Les notations nécessaires à l'étude des jeux répétés, assez lourdes, requièrent l'attention du lecteur.

Pour définir un jeu répété, il faut tout d'abord préciser si le jeu est répété un nombre fini ou infini de fois, et si les joueurs actualisent leurs gains en valorisant les paiements présents plus que les paiements futurs. L'introduction de l'actualisation, naturelle en économie, est une source de complexité dans les jeux répétés. Nous verrons que les équilibres peuvent être sensiblement différents suivant ces caractéristiques. Contrairement aux apparences, les jeux infiniment répétés et non actualisés sont plus simples à étudier.

Soit G un jeu sous forme normale. Pour simplifier, le lecteur pourra supposer le jeu G fini. Etant donné T, un nombre entier fini ou infini et δ, un réel dans l'intervalle $[0,1]$, on définit le jeu répét T fois, actualisé par δ, comme le jeu sous forme développée suivant, noté $G_\delta(T)$:

- ***Jeu répété $G_\delta(T)$ d'horizon T et de facteur d'actualisation δ***

- Les joueurs connaissent à chaque étape t, $1 \leq t \leq T$, les actions prises aux $(t-1)$ étapes précédentes que l'on appelle **histoire.** Une histoire possible h est donc une suite de $(t-1)$ issues $(x^1, \dots, x^{t-1})$ et l'ensemble des histoires possibles à t est X^{t-1} ;

- Les joueurs choisissent une stratégie de G à chaque étape t, $1 \leq t \leq T$, sur la base de l'histoire observée. Plus précisément, une **stratégie** du joueur i définit pour toute histoire possible à l'étape t l'action prise par i, et cepour tout t, $1 \leq t \leq T$. Elle se représente par :

$$\sigma_i = \big(\sigma_i(1), \dots, \sigma_i(t)\big),$$

Où $\sigma_i(t)\colon X^{t-1} \to X_i$ spécifie le comportement de i à t en fonction de l'histoire : le joueur i joue à t l'action $\sigma_i(t)(h)$ s'il a observé h ;

- Les stratégies $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ choisies par les joueurs déterminent par construction une séquence unique x^t, $t = 1, \dots, T$ d'issues appelé **trajectoire** et définie par :

$$x^1 = \sigma(1), x^2 = \sigma(2)(x^1), x^3 = \sigma(3)(x^1, x^2) \text{ et ainsi de suite...}$$

- La **fonction de paiement** de chaque joueur est la moyenne actualisée de ses paiements sur toutes les étapes : si les stratégies σ conduisent à la réalisation des issues x^t, $t = 1, \dots, T$ le paiement du joueur i est égal à :

$$\sum_{t=1}^{t=T} \frac{\delta^{T-1} u_i(x^t)}{\sum_{t=1}^{t=T} \delta^{T-1}} \quad si\ T\ est\ fini$$

$$\lim_{s\to\infty} (1-\delta) \sum_{t=1}^{t=s} \delta^t u_i(x^t) \ si\ T\ est\ infini$$

T est appelé l'**horizon** du jeu et δ son **facteur d'actualisation**. Ce facteur traduit la plus ou moins grande préférence pour le présent. Il est parfois intéressant de l'interpréter différemment : le jeu est *a priori* répété T fois mais il peut être interrompu à chaque étape avec une probabilité égale à $(1-\delta)$.

c) Les « folk theorems »

<u>Remarque :</u> L'énoncé formel de ces théorèmes nécessiterait l'introduction de nombreux concepts ce qui rendrait nettement moins accessible leur compréhension. Je vous propose donc de présenter brièvement l'intuition derrière ces résultats très importants de manière à ce que vous captiez le message principal.

Reprenons l'exemple du dilemme du prisonnier. Dans ce jeu, il n'y a qu'un seul équilibre de Nash « agressif » qui donne aux joueurs des paiements faibles. Comme nous l'avons dit tout à l'heure, il serait plus avantageux pour chacun des joueurs de coopérer et de choisir l'issue « pacifique » de manière à dégager des paiements plus importants. Le problème c'est que ce couple de stratégies ne constitue pas un équilibre de Nash : les joueurs ont intérêt à dévier vers la stratégie agressive.

L'introduction de répétition des interactions permettrait-elle aux joueurs de pouvoir asseoir une coopération stable ? Distinguons deux cas : dans le premier, les interactions sont répétées un nombre fini de fois, dans le second elles le sont indéfiniment. On considèrera dans les deux cas que les paiements sont actualisés ($\delta \in]0,1[$).

Un premier folk théorème nous dit que lorsque les interactions sont répétées un nombre fini de fois, alors il n'existe pas d'autre équilibre de Nash du jeu répété que celui du jeu constituant G. La démonstration est triviale : à la dernière étape du jeu, l'équilibre de Nash du jeu constituant sera nécessairement joué puisqu'il n'existe aucune possibilité de représailles. À l'étape précédente, anticipant cela, les joueurs cherchent à maximiser leur paiement ce qui conduit encore à l'équilibre de Nash du jeu constituant puisque coopération ou pas c'est l'équilibre de Nash qui sera joué à la dernière étape. Autrement dit, toute forme de coopération n'est pas envisageable à l'avant dernière étape du jeu puisque chaque joueur aurait intérêt à dévier de l'équilibre coopératif. En remontant jusqu'à la première étape du jeu, en comprend que lorsque les interactions sont finies, alors il n'existe pas de possibilité de coopération dans un jeu tel que le dilemme du prisonnier.

En revanche, lorsque les interactions sont infinies, ce résultat ne tient plus. Reprenons l'exemple du dilemme du prisonnier. Supposons qu'avant d'entrer dans leurs cellules respectives, les deux joueurs se mettent d'accord pour coopérer et choisir la solution pacifique. À la première étape du jeu, les joueurs peuvent soit coopérer soit dévier. La déviation consiste à jouer la stratégie agressive alors que l'autre joueur coopère. Celle-ci est attrayante car le joueur déviant reçoit un paiement plus important que celui provenant d'une coopération bilatérale. Seulement puisque les interactions sont répétées, une telle déviation peut être punie au cours des étapes suivantes. Le joueur « piégé » peut ainsi décider de punir le « traître », par exemple en refusant toute forme de coopération future et en jouant la solution « agressive » lors de toutes les étapes suivantes (*trigger strategy*). J'insiste sur le fait qu'une telle menace de représailles doit être crédible ! Ainsi, un joueur n'aura intérêt à dévier de l'équilibre coopératif que si le bénéfice associé à sa déviation excède la perte de paiements liée à la punition qu'il se verrait infligée.

Prenons l'exemple d'une stratégie de punition du type *trigger* :

Notons x_d le paiement associé à une déviation, x_p le paiement associé à une punition et x_c le paiement associé à une coopération. On a $x_d \geq x_c \geq x_P$.

Supposons que jusqu'à l'étape t du jeu, les deux joueurs aient choisi de coopérer. À cette étape, si un joueur décide de dévier, son paiement actualisé est donné par $V^d = x_d + \frac{\delta x_p}{1-\delta}$. S'il choisit de coopérer, son paiement actualisé est donné par $V^c = x_c + \delta V^c \Leftrightarrow V^c = \frac{x_c}{1-\delta}$ où V^d représente le paiement actualisé d'un joueur lorsque aucun des protagonistes n'a dévié au cours des étapes passées. Ainsi, le joueur continuera à coopérer si $V^c \geq V^d \Leftrightarrow \frac{x_c}{1-\delta} \geq x_d + \frac{\delta x_p}{1-\delta}$. Cette condition est équivalente à

$$\delta \geq \frac{x_d - x_c}{x_d - x_p}$$

Autrement dit (et c'est ça le plus important), lorsque les interactions sont infiniment répétées, une coopération stable peut constituer un équilibre de Nash du jeu répété à condition que les joueurs ne soient pas trop impatients, c'est-à-dire qu'ils valorisent suffisamment leurs paiements futurs. En effet, si tel n'est pas le cas, le bénéfice instantané d'une déviation excèdera la perte de paiements futurs engendré par une cessation de coopération.